Über solche Koordinatensysteme

auf Flächen, bei denen die eine Schar von Parameterkurven auf der andern gleiche Stücke abschneidet.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Fritz Muth

geprüfter Lehramtskandidat in Augsburg.

Referent: **Prof. Dr. Heinrich Liebmann.**

Korreferent: **Prof. Geh. Rat Dr. Walter Ritter von Dyck.**

Augsburg 1912.

Buch- und Kunstdruckerei von J. P. Himmer.

Über solche Koordinatensysteme

auf Flächen, bei denen die eine Schar von Parameterkurven auf der andern gleiche Stücke abschneidet.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

genehmigte Dissertation.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Vorgelegt von

Fritz Muth

geprüfter Lehramtskandidat in Augsburg.

Referent:
Prof. Dr. Heinrich Liebmann.

Korreferent:
Prof. Geh. Rat Dr. Walter Ritter von Dyck.

Augsburg 1912.

Buch- und Kunstdruckerei von J. P. Himmer.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0047

Einleitung.

Zu den interessantesten Aufgaben der Flächentheorie gehört die Bestimmung von Kurvennetzen mit vorgeschriebenen Eigenschaften und es gibt darüber bereits eine reichhaltige Literatur*). In der vorliegenden Arbeit wird eine Fragestellung behandelt, auf die der Verfasser von seinem verehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Voss, hingewiesen worden ist. Es werden nämlich solche Kurvennetze auf allgemeinen Flächen und besonderen Flächenklassen untersucht, die aus zwei Scharen bestehen, wobei die Kurven der einen Schar, die wir als **Teiler** bezeichnen wollen, auf denen der andern Schar, den **Geteilten,** gleiche Stücke abschneiden. Findet gegenseitige Teilung statt, so reden wir von einem rhombischen Netz.

Als bekannte Fälle eines rhombischen Netzes sind z. B. die erzeugenden Kurven auf Translationsflächen anzuführen, als Beispiele eines einfachen Teilernetzes in der Ebene jede Geradenschar und ihre Orthogonaltrajektorien, ebenso auf jeder Fläche eine Schar von geodätischen Linien mit ihren Orthogonaltrajektorien, die Krümmungslinien auf den Gesimsflächen (surfaces moulures) und auf den von Hazzidakis**) vollständig bestimmten Flächen die Kurven, die bei Bewegung

*) Vgl. z. B. R. v. Lilienthal: Die auf einer Fläche gezogenen Kurven (Math. Enc. III, D, 3); sowie Voss: Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander (Math. Enc. III, D, 6a).

**) Crelle's Journal 95, 1883, S. 120—139.

eine Fläche erzeugen und beständig geodätische Linien bleiben, hierbei sind die Bahnkurven der Punkte natürlich Teiler der Scharen von geodätischen Linien.

Im folgenden werden unter dem Gesichspunkt der Teilung vor allem die ausgezeichneten Kurvensysteme der Flächen und die Regelflächen betrachtet, insofern die Geraden auf andern ausgezeichneten Kurvensystemen oder umgekehrt letztere auf den Geraden gleiche Stücke abschneiden.

I. Kapitel.

Aufstellung der Differenzialgleichungen des Teilungsproblems in zwei Formen.

Die Fläche soll gegeben sein in den Gauss'schen Koordinaten u und v, also durch drei Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v),\ y = \chi(u, v),\ z = \psi(u, v),$$

wobei mindestens zwei der Funktionen φ, χ, ψ von einander unabhängig sein müssen. Die Fundamentalgrössen I. Ordnung sollen mit e, f, g, die Fundamentalgrössen II. Ordnung mit E, F, G bezeichnet werden. Das Bogenelementquadrat ist dann gegeben durch:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Die Schar der Parameterkurven, welche auf der zweiten Schar gleiche Stücke abschneidet, soll kurz als die Schar der „Teilerkurven" oder „Teiler" und jene, auf der gleiche Stücke abgeschnitten werden, als „geteilte Kurven" oder „Geteilte" bezeichnet werden. Sind die Kurven $u = c$ die Teiler der Kurven $v = c$, dann muss $e = 1$ oder eine Funktion von u allein sein. Denn es folgt dann aus $ds = \sqrt{e(u)}\,du$, dass die Bogenlänge der Kurven $v = c$ nur von u abhängt, also die Kurven $u = c$ auf den Kurven $v = c$ gleiche Stücke abschneiden. Soll $v = c$ die Teilerschar von $u = c$ sein, dann muss $g = 1$ oder eine Funktion von v sein.

a) Erste Art der Ableitung der Differenzialgleichung:

Man führt durch die Substitution:

$$u = u(u_1, v_1),\ v = v(u_1, v_1) \text{ und } du = \frac{\delta u}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta u}{\delta v_1}dv_1,$$

$$dv = \frac{\delta v}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta v}{\delta v_1}dv_1$$

ein neues Koordinatensystem u_1, v_1 ein, und setzt das e_1 dieses Koordinatensystems gleich eins.

Das Längenelementquadrat im Systeme $u_1\ v_1$ ist:

$$ds^2 = e\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta u}{\delta v_1}dv_1\right)^2 + 2f\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta u}{\delta v_1}dv_1\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\delta v}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta v}{\delta v_1}dv_1\right) + g\left(\frac{\delta v}{\delta u_1}du_1 + \frac{\delta v}{\delta v_1}dv_1\right)^2$$

oder nach du_1^2, $du_1\,dv_1$, dv_1^2 geordnet:

$$ds^2 = \left\{e\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}\right)^2 + 2f\frac{\delta u}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta u_1} + g\left(\frac{\delta v}{\delta u_1}\right)^2\right\}du_1^2 +$$
$$2\left\{e\frac{\delta u}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta u}{\delta v_1} + f\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta v_1} + \frac{\delta u}{\delta v_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta u_1}\right) + g\frac{\delta v}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta v_1}\right\}\cdot du_1\,dv +$$
$$\left\{e\left(\frac{\delta u}{\delta v_1}\right)^2 + 2f\frac{\delta u}{\delta v_1}\frac{\delta v}{\delta v_1} + g\left(\frac{\delta v}{\delta v_1}\right)^2\right\}dv_1^2$$

Und nun muss

$$e_1 \equiv e\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}\right)^2 + 2f\frac{\delta u}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta u_1} + g\left(\frac{\delta v}{\delta u_1}\right)^2 = 1 \text{ sein.}$$

Sollen die beiden Scharen des Koordinatensystems sich gegenseitig teilen, oder wie man auch sagt, ein „rhombisches Netz“ bilden, dann muss auch $g_1 = 1$ sein.

Zur Bestimmung des Koordinatensystemes hat man dann folgende zwei Differenzialgleichungen:

$$e\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}\right)^2 + 2f\frac{\delta u}{\delta u_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta u_1} + g\left(\frac{\delta u}{\delta u_1}\right)^2 = 1$$
$$e\left(\frac{\delta u}{\delta v_1}\right)^2 + 2f\frac{\delta u}{\delta v_1}\cdot\frac{\delta v}{\delta v_1} + g\left(\frac{\delta v}{\delta v_1}\right)^2 = 1\,.$$

Ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu stören, kann man ein orthogonalgeodätisches Koordinatensystem einführen, also $e = 1$ und $f = o$ setzen, oder auch das System der Minimalkurven $e = o$, $g = o$ benützen.

b) Zweite Art der Ableitung der Differenzialgleichung:

Im Prinzip ist diese Art der Ableitung von der ersten nicht verschieden, doch lässt sich mit der Differenzialgleichung, die aus ihr sich ergibt, etwas leichter umgehen. Es sollen jetzt die Parameter $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ eines Teilernetzes als Funktionen von u und v bestimmt werden, wobei u_1 die Bogenlänge der geteilten Kurven $\psi = c$ ist.

Man gibt sich das Koordinatensystem $\varphi(u,v) = c_1$, $\psi(u,v) = c_2$ und verlangt, dass das Längenelementquadrat ist:

$$ds^2 = d\varphi^2 + 2f_1\, d\varphi\, d\psi + g_1\, d\psi^2.$$

Geht man auf das Koordinatensystem $u = c_1$, $v = c_2$ zurück, dann ergibt sich:

$$ds^2 = \left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du + \frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right)^2 + 2f_1\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du + \frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right)\cdot \left(\frac{\delta\psi}{\delta u}du + \frac{\delta\psi}{\delta v}dv\right) + g_1\left(\frac{\delta\psi}{\delta u}du + \frac{\delta\psi}{\delta v}dv\right)^2$$

$$= \left\{\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}\right)^2 + 2f_1\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u} + g_1\left(\frac{\delta\psi}{\delta u}\right)^2\right\}du^2 +$$

$$2\left\{\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v} + f_1\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u}\right) + \frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\right\}du\,dv +$$

$$\left\{\left(\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)^2 + 2f_1\frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} + g_1\left(\frac{\delta\psi}{\delta v}\right)^2\right\}dv^2$$

Dieser Ausdruck muss identisch sein mit

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

Es müssen also folgende drei Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}\right)^2 + 2f_1\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u} + g_1\left(\frac{\delta\psi}{\delta u}\right)^2 = e$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v} + f_1\left(\frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u} + \frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v}\right) + g_1\frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} = f$$

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)^2 + 2f_1\frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} + g_1\left(\frac{\delta\psi}{\delta v}\right)^2 = g$$

Man hat zur Bestimmung der zwei Unbekannten f_1 und g_1 drei Gleichungen. Also muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden.

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}\right)^2 - e & 2\frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u} & \left(\frac{\delta\psi}{\delta u}\right)^2 \\ \frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta v} - f & \frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta u} + \frac{\delta\varphi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} & \frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} \\ \left(\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)^2 - g & 2\frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{\delta\psi}{\delta v} & \left(\frac{\delta\psi}{\delta v}\right)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ausgerechnet ergibt die Determinante folgendes Produkt:

$$(\varphi_u\,\psi_v - \varphi_v\,\psi_u)\left\{e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2 - (\varphi_u\,\psi_v - \varphi_v\,\psi_u)^2\right\} = 0$$

Dieses Produkt ist Null, wenn einer der beiden Faktoren, aus dem es besteht, Null ist. Verschwindet der Faktor $\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$, so bedeutet das, dass eine der beiden Funktionen φ und ψ nur wieder eine Funktion der andern ist. Geometrisch heisst das, das Kurvensystem $\varphi = c_1$ fällt mit dem System $\psi = c_2$ zusammen, was natürlich auszuschliessen ist.

Als gesuchte Bedingung bleibt also die Differenzialgleichung:

$$e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2 = (\varphi_u\,\psi_v - \varphi_v\,\psi_u)^2$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fragestellungen:

1. Es sollen die Kurven $\psi = c_2$, also die Geteilten, gegeben sein und gesucht werden die Kurven $\varphi = c_1$, welche die Teiler sind.

Die Differenzialgleichung wird dann:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\psi_v - \frac{\delta\varphi}{\delta v}\psi_u = \sqrt{e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2}$$

Das ist für φ eine partielle Differenzialgleichung.

Man behandelt sie nach der allgemeinen Methode, nämlich durch Lösung des Systems:

$$\frac{du}{\psi_v} = -\frac{dv}{\psi_u} = \frac{d\varphi}{\sqrt{e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2}}$$

und sucht zwei intermediäre Integrale $\varphi = c_1$ und $\psi = c_2$, wobei φ die Bogenlänge von $\psi = c_2$ ist, wie das aus der Auflösung folgt. Das allgemeine Integral ist dann

$$\varphi_1 = F(\psi).$$

Es liegt in der Natur der Aufgabe, dass man auf eine partielle Differenzialgleichung kommen musste. Denn man kann sich bei gegebenen Geteilten eine beliebige Kurve als Anfangskurve für die Teiler geben und kommt dann zur Teilerschar, indem man von den Punkten dieser Anfangskurve aus auf den Kurven $\psi = c$ gleiche Stücke abträgt. Alle Teilerscharen der Kurven $\psi = c$ sind dann in der Formel enthalten:

$$\Phi \equiv \varphi + F(\psi) = c$$

wo F das Zeichen für eine noch beliebig zu wählende Funktion ist. $\Phi \equiv F(\psi) = c$ ist dann die oben erwähnte willkürlich zu wählende Anfangskurve. Wählt man $F(\psi)$ fest, dann erhält man die Kurven derselben Schar, indem man c variiert. Dass diese Kurven dann die Teiler der Kurven $\psi = c$ sind, kann

man leicht auch folgendermassen einsehen: man schreibt die Formel zunächst $\varphi = F(\psi) + c$. $c = 0$ dann bekommt man, indem man auf $\psi = c$ immer die Bogenlänge $\varphi = F(\psi)$ aufträgt, eine bestimmte Anfangskurve. Wählt man nun $c = d$, dann wird auf derselben Kurve $\psi = c$ dasselbe $F(\psi)$ abgetragen, immer aber vermehrt um dasselbe d, es ist also die zweite Kurve immer um dasselbe Bogenstück d von der ersten entfernt.

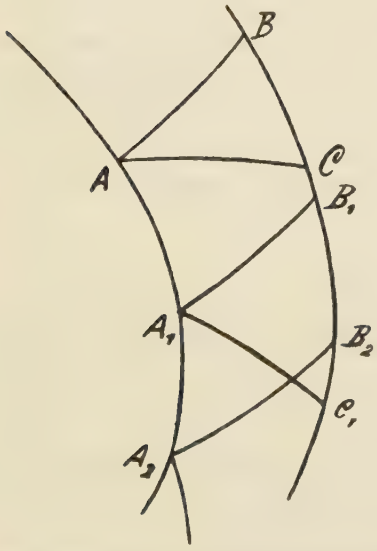
2. Sind die Kurven $\varphi = c$ gegeben und die zu diesen gehörigen Geteilten gesucht, dann ergibt sich folgende Differenzialgleichung:

$$(e - \varphi_u^2)\,\psi_v^2 - 2(f - \varphi_u\,\varphi_v)\,\psi_u\,\psi_v + (g - \varphi_v^2)\,\psi_u^2 = 0$$

Man dividiert mit ψ_v^2 und setzt $\frac{dv}{du} = -\frac{\psi_u}{\psi_v}$

Es ergibt sich dann:

$$(e - \varphi_u^2) + 2(f - \varphi_u\,\varphi_v)\frac{dv}{du} + (g - \varphi_v^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$



Auch hier kann man leicht einsehen, warum sich eine Differenzialgleichung zweiten Grades ergeben musste. Von einem Punkte A der einen Teilerkurve kann man ja doch immer in zwei Richtungen fortschreiten, sodass der Bogen AB gleich dem Bogen AC ist.

Nimmt man statt φ eine beliebige Funktion $F(\varphi)$, so bleibt das System der Teilerkurven erhalten, die Kurven sind nur in anderer Anordnung.

Alle Scharen der Geteilten, zu denen $\varphi = c$ die Teiler sind, genügen also der Differenzialgleichung:

$$(e - (F'(\varphi)\,\varphi_u)^2) + 2(f - F'^2(\varphi)\,\varphi_u\,\varphi_v)\frac{dv}{du} + (g - (F'(\varphi)\,\varphi_v)^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0 \text{ wobei } F'(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}$$

Diese beliebige Funktion $F(\varphi)$ entspricht der Tatsache, dass man die Bogenlänge zwischen den Teilern beliebig wählen darf.

Es sollen jetzt alle Kurvensysteme gesucht werden, zu denen die Kurven $u = c$ die Teiler sind. Sie sind durch die Differenzialgleichung gegeben:

$$e + 2f\frac{dv}{du} + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = F(u)$$

Es ist dann

$$ds = \sqrt{F(u)}\, du$$

also s nur eine Funktion von u. Löst man die Gleichung nach $\frac{dv}{du}$ auf, dann erhält man:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{f}{g} \pm \sqrt{\frac{F(u)}{g} - \frac{eg - f^2}{g^2}}$$

Interessant ist der Fall, bei dem die beiden Kurvensysteme $\psi = c$ in eines zusammenfallen. Es ergibt sich, dass diese Eigenschaft nur die geodätischen Kurven haben, und zwar nur dann, wenn die Kurven, die zu ihnen als Teiler gehören, ihre Orthogonaltrajektorien sind. Dies soll hier gezeigt werden.

Es gibt nur ein Kurvensystem $\psi = c$, wenn die Quadratwurzel verschwindet, also

$$\frac{eg - f^2}{g} = F(u)$$

ist. Wenn aber $\frac{eg - f^2}{g}$ nur von u abhängt, dann folgt daraus:

1. Die Kurven $u = c$ sind Orthogonaltrajektorien einer Schar von geodätischen Kurven.

Die Differenzialgleichung der geteilten Kurven ist:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{f}{g}$$

Durch diese Differenzialgleichung sind aber die zu den Kurven $u = c$ orthogonalen Trajektorien definiert. Es folgt also weiter:

2. Die Geteilten sind eine Schar geodätischer Kurven.

In diesem einleitenden Kapitel wollen wir noch hinweisen auf einige Fälle der Ebene.

Es sollen jene Koordinatensysteme gesucht werden, bei denen die Geraden durch den Anfangspunkt die Geteilten sind.

In Polarkoordinaten geschrieben ist das Längenelement:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Alle Kurvensysteme, die auf den Geraden gleiche Stücke abschneiden, sind also nach Seite 12 in der Formel:

$$r + F(\varphi) = c$$

enthalten.

Dazu gehören die Kreise, wenn $F(\varphi) = 0$ ist,

das System der rotierten Archimedischen Spiralen:

$$r + \varphi = c, \text{ wenn } F(\varphi) = \varphi \text{ ist,}$$

und das System der Konchoiden:

$$r = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$$

wenn a variiert wird.

Legt man das Cartesische Koordinatensystem zu Grunde, dann lautet obige Formel:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + F\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

Es gibt also eine beliebige Anzahl algebraischer und transzendenter Kurven, die auf dem Geradenbüschel gleiche Stücke abschneiden.

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y}{x} = c$$

ist ein System algebraischer Kurven von der vierten Ordnung, die symmetrisch zum Anfangspunkt sind.

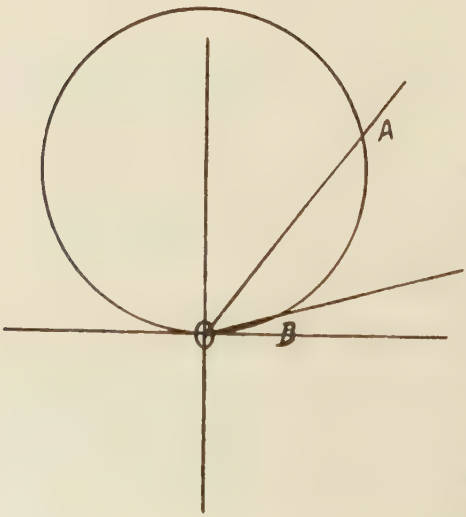
(Siehe Figur Seite 16 oben)

Wenn die Geraden durch den Anfangspunkt selbst Teiler sein sollen, dann ist die Differenzialgleichung der Geteilten:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = F(\varphi)$$

Wählt man $F = a^2$, dann kommt man zu einem einfachen Fall:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = a^2.$$



Das gibt integriert

$$r = a \sin (\varphi - c)$$

Das Kurvensystem entsteht, indem der Kreis mit dem Durchmesser a um den Anfangspunkt rotiert. Der Bogen, der zwischen den Geraden AO und OB liegt, ist deshalb immer von derselben Länge, weil $\measuredangle$ AOB der Peripheriewinkel und AB der zugehörige Bogen ist.

Sollen die konzentrischen Kreise um den Anfangspunkt die Geteilten sein, dann sind die zugehörigen Teilerscharen:

$$r \cdot \varphi + F(r) = c$$

Ist $F(r) = 0$ dann ergibt sich das System der logarithmischen Spiralen:

$$r\varphi = c$$

$r \cdot \varphi$ ist immer die Bogenlänge der Kreise.

Sind die konzentrischen Kreise um den Anfangspunkt selbst die Teiler, dann folgt für die zugehörigen Geteilten die Differenzialgleichung:

$$1 - F'(r^2) + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = 0$$

Es ist aber $r\frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg}\omega$, wenn ω der Winkel des Koordinatensystems ist.

$$\operatorname{tg}\omega = r\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{F'(r^2) - 1}$$

Also ist der Winkel längs der Kurve $r = c$ konstant, oder:

Alle Kurven, auf denen die konzentrischen Kreise gleiche Stücke abschneiden, sind Kurven, die durch Rotation um das gemeinsame Zentrum aus einer hervorgehen.

Bisher war von einseitiger Teilung die Rede. Rhombische Netze in der Ebene bilden Kurvensysteme von der Form:

$$x = \varphi(u) + \psi(v),\ y = \varphi_1(u) + \psi_1(v)$$

wenn also die eine Schar aus einer Kurve durch Schiebung längs der anderen hervorgeht. Soll der Winkel des Koordinatensystems noch dazu konstant sein, dann geben die zwei Scharen von Kurven zwei Systeme von parallelen Geraden. Ist das Cartesische Koordinatensystem zugrunde gelegt, dann ist ein solches System von Kurven, das durch parallele Fortbewegung aus einer hervorgeht, gegeben durch die Gleichung:

$$l(x) + m(y) = c.$$

Jetzt soll eine solche Schar, etwa die Kurven

$$l(x) + m(y) = c$$

Teiler sein zu einer anderen Schar:

$$l_1(x) + m_1(y) = c_1$$

Die allgemeine Differenzialgleichung wird dann:

$$l_1'^2(x) + m_1'^2(y) = (l'(x)\, m_1'(y) - l_1'(x)\, m'(y))^2$$

Dies würde also eine Bedingung geben für:

$$l(x),\ m(y),\ l_1(x),\ m_1(y).$$

Beispiel:

Das System: $y + \operatorname{arc\,tg} x_1 = c$ ist Teilerschar zum System $y + x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_1 = c$. Das erste System entsteht, indem die Kurve $y = -\operatorname{arc\,tg} x_1$ längs der y Achse verschoben wird und die zweite, indem $y = -x_1 - \operatorname{arc\,tg} x$, längs derselben Geraden hingleitet. Für x_1 ist in der endgültigen Formel $x_1 = \sqrt{e^{ax} - 1}$ zu setzen, sodass die Kurvenschar: $y + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{ax} - 1}$ die Kurvenschar $y + \sqrt{e^{ax} - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{ax} - 1}$ teilt.

Man kann hier noch folgende allgemeine Aufgabe erledigen:

Es sei auf einer beliebigen Fläche ein rhombisches System gegeben. Gibt es ein drittes Kurvensystem, welches mit einem der beiden andern wieder ein rhombisches System bildet?

Das Längenelement ist:

$$ds^2 = du^2 + 2f(u,v)\, du\, dv + dv^2$$

Alle Teiler der Schar $v = c$ sind in

$$u + F_1(v) = c$$

enthalten, wo $F_1(v)$ eine willkürlich zu wählende Funktion ist. Alle Geteilten der Schar $v = c$ ergeben sich aus der Differenzialgleichung:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\, f(u,v) \frac{dv}{du} = F_2(v)$$

$$u + F_1(v) = c \text{ ergibt für } \frac{du}{dv} = -F_1'(v)$$

Dies ist in die Differenzialgleichung einzusetzen:

$$F_1'^2(v) + 2f(u,v)\,[-F_1'(v)] = F_2(v)$$

Diese Beziehung kann nur dann bestehen, wenn f nur von v abhängt.

Das Längenelement hat also die Form:

$$ds^2 = du^2 + 2f(v)\, du\, dv + dv^2 \text{ oder}$$

$$ds^2 = (du + f(v)\, dv)^2 + (1 - f(v))\, dv^2$$

Das ist aber das charakteristische Längenelement der abwickelbaren Flächen. Weiter geht hervor, dass die Kurven $v = c$ in der Abwickelung eine Schar von parallelen Geraden geben.

Es haben also nur die Geraden und zwar nur die parallelen die Eigenschaft, mit verschiedenen Kurvensystemen rhombische Systeme bilden zu können. Natürlich sind das alle Schiebungskurven mit einem System von Geraden.

Bilden $u = c$ und $v = c$ ein rhombisches System, dann sind alle Systeme $a u + b \cdot v = \text{const}$ Teiler zu beiden Scharen.

II. Kapitel.

Behandlung der durch die Natur der Fläche gegebenen Koordinatensysteme.

a) Systeme von konjugierten Kurven.

1. Es soll das Koordinatensystem ein rhombisches und der Winkel desselben konstant sein. Man muss also verlangen: $e = 1$, $g = 1$, $f = c$ und $F = 0$.

Das Längenelement ist dann:

$$ds^2 = du^2 + 2c\,du\,dv + dv^2$$

Dieses Längenelement können nur abwickelbare Flächen haben. Für diese ist das Krümmungsmass Null.

Also $EG - F^2 = 0$. Da $F = 0$ ist, muss entweder E oder G Null sein. Das heisst: die Geradenschar der abwickelbaren Fläche gehört zum Koordinatensystem. Es war das natürlich vorauszusehen, denn bei den abwickelbaren Flächen fallen beide Scharen von Haupttangentenkurven in die Geraden zusammen und jede Fortschreitungsrichtung ist dann zu den Geraden konjugiert. Bei der Abwickelung geht das System in zwei Scharen von parallelen Geraden über, es haben also nur die Zylinderflächen die verlangte Eigenschaft.

2. Es sollen die beiden Scharen von konjugierten Kurven ein rhombisches System bilden.

Die Translationsflächen gehören zu diesen Flächen, man kann zeigen, dass sie auch die einzigen reellen dieser Art sind.

$F = 0$ kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$x_{uv} = \alpha x_u + \beta x_v,\quad y_{uv} = \alpha y_u + \beta y_v,\quad z_{uv} = \alpha z_u + \beta z_v$$

Man bildet $2\Sigma x_u x_{uv} = e_v = 0$ und $2\Sigma x_v x_{uv} = g_u = 0$.

Für α und β ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\alpha f + \beta = 0 \text{ und } \alpha + \beta f = 0$$

Diese können nur bestehen, wenn $\begin{vmatrix} 1 & f \\ f & 1 \end{vmatrix} = 0$ also $1 - f^2 = 0$ ist. Diese Bedingung zusammen mit $e = g = 1$ ist aber für reelle Flächen nie erfüllt, sondern nur für Tangentenflächen von Minimalkurven. Sieht man von diesem Fall ab, so kommt man auf $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Also ist dann

$$x_{uv} = 0,\ y_{uv} = 0,\ z_{uv} = 0$$

oder $x = \varphi(u) + f(v)$, $y = \chi(u) + g(v)$, $z = \psi(u) + h(v)$, d. h. man erhält Translationsflächen.

3. Es soll eine Schar von Kurven Teiler sein zu der ihr konjugierten.

Als Koordinatensystem sei das der Haupttangentenkurven zugrunde gelegt. Es ist also $E = G = 0$ zu setzen. Zwei Scharen von Kurven sind dann konjugiert, wenn ihre Fortschreitungsrichtungen entgegengesetzt gleich sind, also

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_I = -\left(\frac{dv}{du}\right)_{II} \text{ oder } \frac{\varphi_u}{\varphi_v} = -\frac{\psi_u}{\psi_v}$$

In der Differenzialgleichung:

$$e - 2f\frac{\psi_u}{\psi_v} + g\left(\frac{\psi_u}{\psi_v}\right)^2 = \left(\varphi_u - \varphi_v\frac{\psi_u}{\psi_v}\right)^2$$

setze man $-\frac{\psi_u}{\psi_v} = \frac{\varphi_u}{\varphi_v}$

Das ergibt dann:

$$e\varphi_v^2 + 2f\varphi_u\varphi_v + g\varphi_u^2 = 4\varphi_u^2\varphi_v^2$$

Dieser Bedingung müssen also jene Kurven $\varphi = c$ genügen, die Teiler sind zu der ihr konjugierten Schar.

Beispiel:

Auf der gemeinen Schraubenfläche:

$$x = v \cdot \cos u,\ y = v \sin u,\ z = u$$

ist das Linienelement:

$$ds^2 = du^2(1 + v^2) + dv^2$$

Die Bedingung ist also:

$$(1 + v^2)\varphi_v^2 + \varphi_u^2 = 4\varphi_u^2\varphi_v^2$$

Ist $\varphi_u = 1$, dann wird $\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{3 - v^2}}$ oder

$$\varphi = u + \arcsin \frac{v}{\sqrt{3}} + c = 0$$

also $v = -\sqrt{3} \sin (u + c)$

Das ist also eine Kurvenschar, welche auf der zu ihr konjugierten $v = \sqrt{3} \sin (u + c)$ gleiche Stücke abschneidet. Diese Kurven werden auf der Schraubenfläche ausgeschnitten durch zwei Kreiszylinder, die sich im Anfangspunkt berühren. Das Kurvensystem entsteht durch Rotation dieser Zylinder.

Allgemein sieht man, dass sich auf jeder Fläche eine ganze Anzahl von Kurvenscharen angeben lässt, die Teiler sind zu der ihr konjugierten.

4. Wenn man noch dazu fordert, dass auch der Winkel konstant ist, dann wird es nicht auf jeder Fläche solche Koordinatensysteme geben.

Denn aus

$$\cos \alpha = \frac{e + f(k + K) + g\,k\,K}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fK + gK^2)}} = \text{const}$$

und $k = -K$ folgt, dass es auf jeder Fläche höchstens vier Koordinatensysteme geben kann, bei denen die Parameterkurven konjugiert sind und der Winkel des Koordinatensystems konstant ist. Dazu käme dann noch die Forderung, dass die eine Schar Teiler der andern sein soll.

Um solche Flächen zu bestimmen, bei denen eine Kurvenschar Teiler ist zu der ihr konjugierten, und ausserdem der Winkel des Koordinatensystems konstant sein soll, führt man dieses Koordinatensystem selbst ein.

Man setzt mithin $e = 1$, $f = a\sqrt{g}$ und $F = 0$

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind dann:

$$\text{I} \quad E_v = \frac{-a}{2(1 - a^2)} \frac{g_u}{\sqrt{g}} E - \frac{a}{2(1 - a^2)} \frac{g_u}{\sqrt{g}} G$$

$$\text{II} \quad G_u = \frac{1}{2(1 - a^2)} \frac{g_u}{g} G + \frac{1}{2(1 - a^2)} g_u E$$

$$\text{III} \quad EG = \frac{a}{2} \frac{g_u}{\sqrt{g}} - \frac{1}{2} g_{uu} + \frac{1}{4} \frac{g_u^2}{g} - \frac{a}{4} \frac{g_u g_v}{\sqrt{g^3}}$$

Man multipliziert I mit E und ersetzt EG gemäss III, für E^2 folgt dann eine Differenzialgleichung mit zweitem Glied. Genau so verfährt man mit Gleichung II und erhält eine Differenzialgleichung für G^2. Zu E^2 tritt noch eine willkürliche Funktion von u und zu G^2 eine solche von v. Diese sind dann noch der Bedingung III unterworfen. Im Allgemeinen kann man die Integrationen nicht ausführen.

Beispiel:

$$E = \frac{1}{c_1 (u + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}}, \quad G = 1, g = c_1 (u + c_2)^2 + \frac{1}{c_1} \text{ und}$$

$$f = a \sqrt{c_1 (u + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}}$$

Das gibt durch Variation von c_1 und c_2 Scharen von Flächen.

Das Längenelement ist:

$$ds^2 = du^2 + 2a \sqrt{c_1 (u + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}}\, du\, dv + \left[c_1 (u + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}\right] dv^2$$

Alle diese Flächen sind auf Rotationsflächen verbiegbar, ist $a = o$ dann ergibt sich die Rotationsfläche selbst. Die Teiler sind die Kurven konstanten Krümmungsmasses und fallen mithin bei der Verbiegung auf die Rotationsfläche mit den Parallelkreisen zusammen.

b) Die Krümmungslinien.

1. Das Koordinatensystem der Krümmungslinien ist ein orthogonales. Ist eine Schar der Krümmungslinien Teiler zur andern, dann sind die Geteilten geodätisch.*) Ist eine Kurve Krümmungslinie, so heisst das, es schneiden sich längs ihr die Flächennormalen. Ist sie geodätisch, dann müssen ihre Hauptnormalen in die jeweiligen Flächennormalen fallen. Da sich letztere schneiden, so hat man eine Kurve, deren Hauptnormalen sich schneiden. Eine solche Kurve ist nach einem bekannten Satze eben. Die Krümmungslinien der Flächen sind also eben. Umgekehrt sind aber nicht auch alle ebenen Krümmungslinien geodätisch. Nimmt man eine beliebige ebene Kurve, zieht

*) Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen. II. Bd. S. 440 Satz 19.

Normalen zu ihr unter konstantem Winkel gegen die Ebene, dann bilden diese Geraden eine abwickelbare Fläche. Legt man eine Fläche durch die ebene Kurve so, dass sie senkrecht zur Fläche der Normalen ist, dann ist diese ebene Kurve Krümmungslinie. Damit sie auch auf der durch sie gelegten Fläche geodätisch ist, müssen ihre Hauptnormalen in die Flächennormalen hineinfallen, das heisst aber die Fläche muss die Ebene der Kurve senkrecht durchschneiden. Die Flächen werden also gebildet von den Orthogonaltrajektorien einer Schar von ∞^1 Ebenen. Die Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien heissen Gesimsflächen (surfaces moulures). Hierher gehören: die Rotationsflächen, die Ebenen bilden ein Büschel, die Schraubenröhrenflächen, die ebenen Krümmungslinien sind die Kreise und schliesslich gehören auch die abwickelbaren Flächen mit den Geraden als der einen Schar von ebenen Krümmungslinien hierher.

2. Sollen die Krümmungslinien ein rhombisches System bilden, dann kommt man auf die Zylinderflächen. Es ist also $e = 1$, $g = 1$, $f = 0$ und $F = 0$.

$e = 1$, $g = 1$, $f = 0$ sagt, dass die Fläche abwickelbar ist. Die eine Schar der Krümmungslinien abwickelbarer Flächen sind immer die Geraden. Da auch $e = 1$, $g = 1$, $F = 0$ so heisst das, die Flächen sind auch Schiebungsflächen. Die Geraden gleiten also längs der andern Schar von Krümmungslinien, die eben sein müssen. Diese Flächen sind aber die Zylinderflächen.

c) Die Haupttangentenkurven.

Ein rhombisches Netz mit konstantem Winkel können die Haupttangentenkurven nicht bilden. Rhombische Systeme mit konstantem Winkel gibt es nur auf abwickelbaren Flächen. Auf diesen fallen aber beide Scharen von Haupttangentenkurven in die Geraden zusammen.

1. Ein rhombisches Netz bilden die Haupttangentenkurven nach dem Satze von Hazzidakis nur auf den Flächen konstanter negativer Krümmung.

Der folgende Beweis unterscheidet sich etwas von dem Beweise von Hazzidakis.

Man legt wieder das Koordinatensystem der Haupttangentenkurven zugrunde. $e = 1$, $g = 1$, $E = 0$ u. $G = 0$

Also: I $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1$ II $x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1$

Man differenziert I nach v und II nach u:

I $x_u x_{uv} + y_u y_{uv} + z_u z_{uv} = 0$, $x_v x_{uv} + y_v y_{uv} + z_v z_{uv} = 0$

Daraus $x_{uv} : y_{uv} : z_{uv} \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$

oder: $x_{uv} = \lambda(u,v)\ (y_u y_v - y_u y_v)$, $y_{uv} = \lambda(z_u x_v - x_u z_v)$
$z_{uv} = \lambda(x_u y_v - y_u x_v)$

Jetzt kann man zeigen, dass bei unseren Voraussetzungen $(-\lambda^2)$ das Krümmungsmass der Fläche ist.

Das Krümmungsmass der Fläche ist $K = \dfrac{-F^2}{1 - f^2}$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}^2}{(1 - f^2)^2} = \frac{-\begin{vmatrix} \Sigma x_{uv}^2 & \Sigma x_u x_{uv} & \Sigma x_v x_{uv} \\ \Sigma x_u x_{uv} & \Sigma x_u^2 & \Sigma x_u x_v \\ \Sigma x_v x_{uv} & \Sigma x_u x_v & \Sigma x_v^2 \end{vmatrix}}{(1 - f^2)^2}$$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} \Sigma x_{uv} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & f & 1 \end{vmatrix}}{(1 - f^2)^2} = \frac{-\Sigma x_{uv}^2}{1 - f^2}$$

Für x_{uv}, y_{uv} und z_{uv} setzt man die oben angegebenen Werte ein:

$$K = \frac{-\Sigma x_{uv}^2}{1 - f^2} = \frac{1 - f^2}{-\lambda^2} \Big[(y_u z_v - z_u y_v)^2 + z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u x_v - y_u x_v) \Big] =$$

oder $K = -\lambda^2$

Das Krümmungsmass der Fläche ist also $(-\lambda^2)$

λ darf zunächst eine beliebige Funktion von u und v sein.

Wenn $E = 0$ ist, dann besteht die Relation:

$$x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v,\ y_{uu} = \alpha y_u + \beta y_v,\ z_{uu} = \alpha z_u + \beta z_v$$

Man bildet jetzt $\Sigma x_u x_{uu} = \dfrac{e_u}{2} = \alpha \Sigma x_u^2 + \beta \Sigma x_u x_v$

oder $0 = \alpha + \beta f$

ebenso bildet man $f_u = \Sigma x_v x_{uu} = \alpha \Sigma x_u x_v + \beta \Sigma x_v^2$

oder $f_u = \alpha f + \beta$

Aus den beiden Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta f \text{ und } f_u = \alpha f + \beta$$

folgt: $$\alpha = \frac{-ff_u}{1-f^2} \quad \beta = \frac{f_u}{1-f^2}$$

also $$x_{uu} = \frac{-ff_u}{1-f^2} x_u + \frac{f_u}{1-f^2} x_v$$

Auf demselben Weg findet man für x_{vv}

$$x_{vv} = \frac{f_v}{1-f^2} x_u - \frac{ff_v}{1-f^2} x_v$$

Jetzt bildet man x_{uuv}

$$x_{uuv} = \frac{-\delta}{\delta v} \frac{ff_u}{1-f^2} x_u + \frac{\delta}{\delta v} \frac{f_u}{1-f^2} x_v$$
$$- \frac{ff_u}{1-f^2} x_{uv} + \frac{f_u}{1-f^2} x_{vv}$$

Hier ersetzt man x_{vv} vermöge der soeben abgeleiteten Formel. Das gibt

$$\text{I.} \quad x_{uuv} = \frac{-ff_u}{1-f^2} x_{uv} + x_u \left(-\frac{\delta}{v} \frac{ff_u}{1-f^2} + \frac{f_u f_v}{1-f^2} \right)$$
$$+ x_v \left(\frac{\delta}{\delta v} \frac{f_u}{1-f^2} - \frac{f f_u f_v}{(1-f^2)^2} \right)$$

Es ist aber auch $x_{uv} = \lambda \, (y_u z_v - z_u y_v)$

Man bildet auch daraus x_{uuv}, indem man x_{uv} nach u differenziert

$$x_{uvu} = \lambda_u (y_u y_v - z_u y_v) + \lambda \left[\left(\frac{-ff_u}{1-f^2} y_u + \frac{f_u}{1-f^2} y_v \right) z_v \right.$$
$$+ y_u \lambda (x_u y_v - y_u x_v) - \lambda z_u (z_u x_v - x_u z_v)$$
$$\left. - y_v \left(\frac{-ff_u}{1-f^2} z_u + \frac{f_u}{1-f^2} z_v \right) \right]$$

Hieraus entsteht durch einfache Umformung:

$$\text{II.} \quad x_{uvu} = \frac{\lambda_u}{\lambda} x_{uv} - x_{uv} \frac{ff_u}{1-f^2} + \lambda^2 x_u f - \lambda^2 x_v$$

Es ist aber $x_{uuv} = x_{uvu}$

Das würde aber die Beziehung liefern:

$$\lambda_u \frac{x_{uv}}{\lambda} = x_{uv} \frac{ff_u}{1-f^2} + x_{uv} \frac{ff_u}{1-f^2} + A(u,v) x_u + B(u,v) x_v$$

Unter A und B sollen die Koeffizienten von x_u und x_v zusammengefasst sein. Dieselbe Beziehung würde sich auch für y_{uv} und z_{uv} ergeben. Das würde aber heissen $F = 0$. F soll aber nicht Null sein, also müssen die Koeffizienten Null sein. Das gibt $\lambda_u = 0$. Auf dieselbe Weise folgt $\lambda_v = 0$. Es muss also λ konstant sein. Da $K = -\lambda^2$ ist, so heisst das: die Flächen mit der verlangten Eigenschaft sind von konstanter negativer Krümmung.

Zusatz: Bei dieser Gelegenheit möge auch die Frage beantwortet werden, ob man eine Fläche konstanter negativer Krümmung so verbiegen kann, dass ein rhombisches Netz auf ihr zu Haupttangentenkurven wird.

Wenn $e = 1$, $g = 1$ ist, dann sind die Fundamentalgleichungen

$$\text{I.}\quad E_v - F_u = \frac{f f_u}{1 - f^2} F - \frac{f_u}{1 - f^2} G$$

$$\text{II.}\quad G_u - F_v = \frac{f f_v}{1 - f^2} F - \frac{f_v}{1 - f^2} E$$

$$\text{III.}\quad \frac{EG - F^2}{1 - f^2} = \frac{f_{uv}}{1 - f^2} + \frac{f f_u f_v}{(1 - f^2)^2} = c\,(\text{konst})$$

Die Fundamentalgrösse erster Ordnung f muss also der Differenzialgleichung:

$$\frac{f_{uv}}{1 - f^2} + \frac{f f_u f_v}{(1 - f^2)^2} = c$$

genügen. Umgekehrt: Genügt bei den gegebenen Voraussetzungen $e = 1$, $g = 1$, f dieser Differenzialgleichung, dann ist die zugehörige Fläche von konstanter Krümmung. Es müssen E, F, G so gewählt werden, dass sie die Bedingungen I und II erfüllen. Kann es bei diesen Verbiegungen vorkommen, dass das rhombische Netz zu Haupttangentenkurven der Fläche wird, kann man also, ohne dass I und II einen Widerspruch geben, E und G Null setzen? I und II gehen über in $\text{I.}\ \frac{F_u}{F} = \frac{f f_u}{f^2 - 1}$ $\text{II.}\ \frac{F_v}{F} = \frac{f f_v}{f^2 - 1}$

Man hat demnach nun zu setzen

$$F = c_1 \sqrt{f^2 + 1}\,.$$

2. Die eine Schar der Haupttangentenkurven soll die andere teilen und der Winkel des Koordinatensystems ein Rechter sein.

Aus dem Satz über geodätische Linien Seite 16 folgt, dass die geteilte Haupttangentenkurvenschar geodätisch ist. Aber Haupttangentenkurven, die zugleich geodätisch sind, können bekanntlich nur Geraden sein. Die gesuchten Flächen sind also Regelflächen. Da die Haupttangentenkurven aufeinander senkrecht stehen, sind sie auch Minimalflächen Die einzige Minimal-Regelfläche ist aber die gemeine Schraubenfläche.

3. Es soll auch jetzt die eine Schar der Haupttangentenkurven Teiler der andern und der Winkel konstant aber kein Rechter sein.

Also $e = 1 \quad f = a\sqrt{g} \quad E = 0 \quad G = 0$

Die Fundamentalgleichungen sind dann:

$$\text{I. } F_u = -\frac{1}{2}\frac{1+a^2}{1-a^2}\frac{g_u}{g}F$$

$$\text{II. } F_v = \left(\frac{g_v}{2g} + \frac{a}{1-a^2}\frac{g_u}{\sqrt{g_u}}\right)F$$

$$\text{III. } -F^2 = \frac{a}{2}\frac{g_{uv}}{\sqrt{g}} - \frac{1}{2}g_{uu} + \frac{1}{4}\frac{g_u{}^2}{g} - \frac{a}{4}\frac{g_u g_v}{\sqrt{g^3}}$$

Beispiel:

Nimmt man $a = i$ und $g = u^2\psi^2(v)$ dann folgt für ψ:

$$\frac{\psi''\psi - \psi'^2}{\psi^2} = \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + 2i\frac{\psi'}{\psi}$$

oder $$\frac{d}{dv}\log\psi = \frac{2ie^{2iv}}{1-e^{2iv}} = -\frac{d}{dv}\ln(1-e^{2iv})$$

also $$\psi = -(1-e^{2iv}) = e^{2iv} - 1$$

Es ist also $g = u^2(e^{2iv} - 1)^2$

Damit ist dann diese Fläche bestimmt.

4. Ist die eine Schar der Haupttangentenkurven Teiler der andern, dann kann man zur Integration der Teiler einen integrierenden Faktor angeben. Der Grund liegt darin, dass man eine infinitesimale Transformation kennt.

Als Koordinatensystem sei das der Krümmungslinien zugrunde gelegt. Die Differenzialgleichung der Haupttangentenkurven ist dann:

$$E\,du^2 + G\,dv^2 = 0$$

Also: I. $\sqrt{E}\,du + \sqrt{-G}\,dv = 0$ u. II. $\sqrt{E}\,du - \sqrt{-G}\,dv = 0$

Es soll I auf II gleiche Stücke abschneiden. In der zu Anfang abgeleiteten Differenzialgleichung sind also $\varphi = c$ durch $\sqrt{E}\,du + \sqrt{-G}\,dv = 0$ u. $\psi = c$ durch $\sqrt{E}\,du - \sqrt{-G}\,dv = 0$

Die Differenzialgleichung ist:

$$e + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \left(\varphi_u + \varphi_v \frac{dv}{du}\right)^2$$

Es ist $\varphi_u = \mu\sqrt{E}$ und $\varphi_v = \mu\sqrt{-G}$

wo μ ein integrierender Faktor ist.

$$e + g\frac{E}{-G} = \left(\mu\sqrt{E} + \mu\sqrt{-G}\sqrt{\frac{E}{-G}}\right)^2$$

Das gibt: $4\mu^2 E = \dfrac{Eg - eG}{-G}$

$$\text{oder } \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Eg - eG}{-EG}}$$

d) Die geodätischen Linien.

Die Bedingung dafür, dass die Kurven $v = c$ geodätisch sind, ist $2ef_u - ee_v - fe_u = 0$. Ist die Schar $u = c$ geodätisch, dann muss $fg_v - 2gf_v + gg_u = 0$ sein. Beides folgt aus der Differenzialgleichung für geodätische Linien. Man kann diese Bedingung auch leicht aus der Eigenschaft der geodätischen Linien, dass ihre Orthogonaltrajektorien auf ihnen gleiche Stücke abschneiden, folgern.

Das Längenelement sei: $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ Die Kurven $v = c$ sollen geodätisch sein. Man schreibt das Längenelement wie folgt:

$$ds^2 = \left(\sqrt{e}\,du + \frac{f}{\sqrt{e}}\,dv\right)^2 + \left(g - \frac{f^2}{e}\right)dv^2$$

Die Kurven $v = c$ sind orthoganal zu den durch:

$$\sqrt{e}\,du + \frac{f}{\sqrt{e}}dv = 0$$

definierten Kurven.

Diese sollen auf der Schar $v = c$ gleiche Stücke abschneiden.

Dann muss $du_1 = \sqrt{e}\,du + \frac{f}{\sqrt{e}}dv$ ein vollständiges Differenzial sein, denn dann hat das Längenelement die Form

$$ds^2 = du_1^2 + \left(g - \frac{f^2}{e}\right)dv^2$$

Damit das ein vollständiges Differenzial ist, muss

$$\frac{\delta\sqrt{e}}{\delta v} = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{f}{\sqrt{e}}\right) \text{ sein. Also } \frac{e_v}{2\sqrt{e}} = \left(\sqrt{e}\,f_u - \frac{e_u}{2\sqrt{e}}f\right) : e$$

Das gibt aber: $2ef_u - ee_v - fe_u = 0$

1. Es sollen zwei Scharen von geodätischen Linien ein rhombisches Netz bilden.

Es ist also $e = 1$ und $g = 1$ Aus den beiden obigen Bedingungen:

$2ef_u - ee_v - fe_u = 0$ und $fg_v - 2gf_v + gg_u = 0$

folgt, dass auch f konstant ist. $f = c$

Das Längenelement ist dann:

$$ds^2 = du^2 + 2c\,du\,dv + dv$$

Das ist aber das Längenelement von abwickelbaren Flächen. In der Abwickelung geben die Kurven $u = c_1$ und $v = c_2$ zwei Scharen von parallelen Geraden.

2. Ein rhombisches Netz, in dem nur eine Kurvenschar geodätisch ist, kann auch nur auf abwickelbaren Flächen vorkommen.

Denn aus $e = 1, g = 1$ u. $2ef_u - ee_v - fe_u = 0$ folgt $f_u = 0$, f hängt nur von v ab. Das Längenelement ist also:

$$ds^2 = du^2 + 2f(v)\,du\,dv + dv^2$$

oder

$$ds^2 = (du + f(v)\,dv)^2 + (1 - f^2(v))\,dv^2$$

Das ist aber wieder das charakteristische Koordinatensystem abwickelbarer Flächen. In der Abwickelung ist es eine Schar von Schiebungskurven mit einer Schar paralleler Geraden.

3. Die Orthogonaltrajektorien geodätischer Linien schneiden auf diesen gleiche Stücke ab. Können nun die Orthogonaltrajektorien auch geodätisch sein?

Es ist also $e = 1$ $f = 0$ und $f g_u - 2 g f_v - g g_u = 0$

Nach der dritten Bedingung ist $g_u = 0$, also g nur von v abhängig. Das Linienelement ist mithin:

$$ds^2 = du^2 + g(v)\, dv^2.$$

Daraus folgt aber wie oben, dass diese Eigenschaft nur auf abwickelbaren Flächen vorkommen kann und dass die Orthogonaltrajektorien in der Abwickelung eine Schar parallele Geraden geben.

4. Es soll eine Schar geodätischer Kurven Teiler zu einer andern Schar geodätischer Kurven sein.

Also: $e = 1$, $e f_u - e e_v - f e_u = 0$ und $f g_v - 2 g f_v - g g_u = 0$
Die zweite Bedingung gibt $f_u = 0$. Das heisst f hängt bloss von v ab. Die dritte Bedingung kann man auch so schreiben:

$$f_v - f\frac{g_v}{2g} = \frac{g_u}{g}$$

Das ist eine Differenzialgleichung mit zweitem Glied für f Man findet die Lösung, indem man zunächst die Differenzialgleichung: $f_v - f\frac{g_v}{2g} = 0$ löst.

Das Endresultat ist:

$$f = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[c + \int \frac{g_u}{2}\sqrt{g}\, dv\right]$$

Diese Grösse darf nur von v abhängen.

Beispiel:

$c = 0$, $g = u$, dann ist $f = \frac{v}{2}$ und das Längenelement

$$ds^2 = du^2 + v\, du\, dv + u\, dv^2$$

Man darf allgemein $g = u + \Phi(v)$ setzen, wenn $c = 0$ angenommen wird, und kommt immer zu Flächen mit der verlangten Eigenschaft.

Zusatz: Wie schon erwähnt, sind von Hazzidakis diejenigen Kurven bestimmt worden, die bei ihrer Fortbewegung

beständig geodätische Linien auf den erzeugten Flächen bleiben. Dies führt auf die allgemeine Fragestellung, wie man den zunächst trivial erscheinenden Fall eines Teilernetzes erledigen kann, der eintritt, wenn ganz allgemein die geteilten Kurven kongruent, die Teiler Bahnkurven sind. Die keineswegs triviale, hiermit zusammenhängende Frage: Wie müssen die Fundamentalgrössen erster Ordnung beschaffen sein, damit die Koordinaten ein Kurvensystem bilden, das sich durch Verbiegung in kongruente Kurven $v = c$, das andere in Bahnkurven der die Fläche erzeugenden Bewegung transformieren lässt, führt zu dem Ergebnis:

Die Kurven $v = c$ sind kongruent, die Kurven $u = c$ Bahnkurven, wenn $e = 1$ und die beiden Ausdrücke

$$\left(\frac{\delta^2 x}{\delta u^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta^2 y}{\delta u^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\right)^2$$

$$\text{sowie } \left(\frac{\delta^3 x}{\delta u^3}\right)^2 + \left(\frac{\delta^3 y}{\delta u^3}\right)^2 + \left(\frac{\delta^3 z}{\delta u^3}\right)^2$$

Funktionen von u allein sind. Diese beiden Summen müssten aber erst noch durch Biegungsinvarianten ausgedrückt und die beiden gefundenen Forderungen im Sinne der Flächentheorie als innere geometrische Eigenschaften gedeutet werden, um die Frage vollständig zu beantworten.

e) Die Orthogonaltrajektorien von geodätischen Linien.

1. Wir untersuchen die Teiler der Orthogonaltrajektorien. Die Orthogonaltrajektorien $\psi = c$ genügen der Bedingung:

$$e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2 = eg - f^2$$

Auf diesen Kurven $\psi = c$ schneiden dann die durch die Differenzialgleichung:

$$e\,\psi_v^2 - 2f\,\psi_u\,\psi_v + g\,\psi_u^2 = (\varphi_u\,\psi_v - \varphi_v\,\psi_u)^2$$

bestimmten Kurven $\varphi = c$ gleiche Stücke ab.

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\varphi_u\,\psi_v - \varphi_v\,\psi_u = \pm\sqrt{eg - f^2}$$

Also ergibt sich hierbei auch:

Die Orthogonaltrajektorien $\psi = c$ einer Schar von geodätischen Kurven vermitteln mit ihren Teilern $\varphi = c$ eine flächentreue Abbildung in die Ebene: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

2. Wir betrachten jetzt die Geteilten der Orthogonaltrajektorien. Die Differenzialgleichung aller Geteilten ist

$$1 + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = F(u)$$

wenn $ds^2 = du^2 + g\,dv^2$ das Längenelement ist.

Der Winkel des Koordinatensystems sei ω, dann ist

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{g}\,\frac{dv}{du} = \sqrt{F(u) - 1}$$

Es gilt also:

Dieselbe Orthogonaltrajektorie schneidet alle ihre Geteilten unter demselben Winkel. Doch darf sich der Winkel mit der Orthogonaltrajektorie ändern.

Natürlich darf auch der Winkel für alle Orthogonaltrajektorien derselbe sein.

Umgekehrt gilt der Satz:

Nur die Orthogonaltrajektorien einer Schar geodätischer Kurven können mit ihren Geteilten auf der ganzen Fläche denselben Winkel bilden.

Denn wenn $e = 1$ und $\cos\omega = \dfrac{f}{2\sqrt{g}} = a$ ist, dann wird das Längenelement $ds^2 = du^2 + 2a\sqrt{g}\,du\,dv + g\,dv^2$

oder: $ds^2 = (1 - a^2)\,du^2 + (a\,du + \sqrt{g}\,dv)^2$

Die Kurven $u = c$ sind also Orthogonaltrajektorien zu der durch die Differenzialgleichung: $a\,du + \sqrt{g}\,dv = 0$ definierten Schar von geodätischen Kurven.

Für den speziellen Fall, dass $\omega = 90^0$ ist, sind die Geteilten geodätisch.

3. Es soll eine Schar von Orthogonaltrajektorien Teiler der andern sein.

Also $e = 1$, $\dfrac{eg - f^2}{g} = F_1(u)$ und $\dfrac{eg - f^2}{g} = F_2(v)$

(Bed. der Orthog. Tr. v. geod. Linien.)

Daraus folgt $g = \dfrac{F_2(v)}{F_1(u)}$ und $f = \sqrt{\dfrac{F_2(v)}{F_1(u)} - F_2(v)}$

Beispiel:

$F_2(v) = 1 \quad F_1(u) = \cos^2 u$

dann ist $ds^2 = du^2 + \operatorname{tg} u\,du\,dv + \dfrac{d}{\cos^2 u}\,dv^2$

III. Kapitel.

Die Regelflächen.

Die Regelfläche sei gegeben in der Form:

$$x = \varphi(u) + v\,f(u),\quad y = \chi(u) + v\,g(u),\quad z = \psi(u) + v\,h(u)$$

Die Kurven $u = c$ sind also die Geraden der Fläche. u sei die Bogenlänge der Leitkurve. Das Bogenelementquadrat ist dann:

$$ds^2 = (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\,du^2 + 2\Sigma\varphi' f\,du\,dv + dv^2$$

a) Die geodätischen Linien auf Regelflächen.

1. Gibt es Regelflächen, auf denen die Kurven $v = c$ geodätisch sind?

Damit die Kurven $v = c$ geodätisch sind, muss folgende Beziehung bestehen:

$$2ef_u - ee_v - fe_u = 0$$

$$2(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\frac{d}{du}(\Sigma\varphi' f) - 2(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\cdot$$

$$(\varphi' f' + v\Sigma f'^2) - 2\Sigma\varphi' f\left(v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f' f''\right) = 0$$

Diesen Ausdruck kann man nach Potenzen von v ordnen. Dann muss jeder Koeffizient einer Potenz von v für sich verschwinden. Die höchste vorkommende Potenz von v ist die dritte. Der Koeffizient von v^3 ist $(\Sigma f'^2)^2$ Dieser ist Null, wenn $\Sigma f'^2 = 0$ ist, also, Realität vorausgesetzt, f, g und h konstant sind. Die verlangte Eigenschaft haben also nur die Zylinderflächen.

2. Gibt es Regelflächen, auf denen die Geraden die Teiler einer Schar von geodätischen Kurven sein können?

Es ist keine Beschränkung in der Allgemeinheit der Regelfläche, wenn man $\Sigma\varphi' f = 0$ setzt.

Die Differenzialgleichung der geodätischen Linien auf Regelflächen ist:

$$\begin{vmatrix} 1+2v\Sigma\varphi' f'+v^2\Sigma f'^2, & v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'+v^2\Sigma f f''+2(\Sigma\varphi' f'+v\Sigma f'^2)\frac{dv}{du} \\ \frac{dv}{du} & -(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2) + \frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

Die Differenzialgleichung aller Geteilten der Geraden ist:

$$1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = F_1(u)$$

daraus folgt: $\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = F_1(u) - 1 - 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2$.

Man setze $F_1(u) - 1 = F(u)$, und differenziere nach u:

$$2\frac{dv}{du}\cdot\frac{d^2v}{du^2} = F'(u) - 2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' - 2v^2\Sigma f' f'' - \frac{dv}{du}\cdot(2\Sigma\varphi' f' + 2v\Sigma f'^2)$$

$$\text{also } \frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{2\frac{dv}{du}}\left(F'(u) - 2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' - 2v^2\Sigma f' f''\right) - (\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)$$

Man setze jetzt $\frac{dv}{du}$ und $\frac{d^2v}{du^2}$ in die obige Differenzialgleichung der geodätischen Linien ein:

$$(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\left[-(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2) + \frac{F'(u) - 2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' - 2v^2\Sigma f' f''}{2\sqrt{F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2}} - (\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)\right] -$$

$$\left(v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f' f''\right)\sqrt{F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2} -$$

$$2(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)\cdot(F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2) = 0$$

$$\text{oder: } (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\frac{(F'(u) - 2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' - 2v^2\Sigma f' f'')}{2\sqrt{F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2}} -$$

$$\left(v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f' f''\right)\sqrt{F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2} =$$

$$+ 2(F(u) + 1)(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit

$$\sqrt{F(u) - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2}$$

multipliziert.

$$(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\left(F' - 2v\frac{d\Sigma\varphi' f'}{du} - v^2\frac{d\Sigma f'^2}{du}\right) -$$

$$\left(v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f' f''\right)(F - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2) = 2(F(u) + 1)$$

$$\cdot(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)\sqrt{F - 2v\Sigma\varphi' f' - v^2\Sigma f'^2}$$

Auch jetzt müssen die Koeffizienten der Potenzen von v für sich Null sein. Im wesentlichen ist der Koeffizient von v^4:

$$\Sigma f'^2\frac{d}{du}(\Sigma f'^2) = \tfrac{1}{2}\frac{d}{du}(\Sigma f'^2)^2$$

Dieser ist Null, also $\Sigma f'^2 = a$ (konst.).

Der Ausdruck wird also:

$$(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + a\cdot v^2)\left(F' - 2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'\right) - \left(v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'\right)$$

$$\cdot(F - 2v\Sigma\varphi' f' - a^2v^2) = 2(F(u) + 1)(\Sigma\varphi' f' + a\cdot v)$$

$$\cdot\sqrt{F - 2v\Sigma\varphi' f' - av^2}$$

oder: $(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + av^2)\left(F' - v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'\right) - v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'(F+1)$

$$= 2(F + 1)(\Sigma\varphi' f' + av)\sqrt{F - 2v\Sigma\varphi' f' - av^2}$$

Der Koeffizient von v^3 ist: $-a\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f'$

Dieser Koeffizient ist Null, wenn $\frac{d}{du}(\Sigma\varphi' f') = 0$

oder $\Sigma\varphi' f' = b$ (konst.) ist.

Der Ausdruck ist nun:

$$(1 + 2vb + av^2)F' = 2(F+1)(\Sigma\varphi' f' + av)\sqrt{F - 2v\Sigma\varphi' f' - bv^2}$$

Wenn der Ausdruck quadriert wird, ergibt sich als höchste Potenz von v, v^4. Der Koeffizient ist:

$$a^2F'^2 - 4(F + 1)^2a^2(-a) = v$$

Diese Gleichung kann für reelle Werte der darin vorkommenden Grössen nur für $a = \Sigma f'^2 = 0$ bestehen.

Also: Von reellen Regelflächen haben nur die Zylinderflächen die Eigenschaft, dass die Geraden auf einer Schar von geodätischen Kurven gleiche Stücke abschneiden können.

Ueber imaginäre Regelflächen mit der geforderten Eigenschaft ist zu bemerken:

Obige Bedingung kann auch so geschrieben werden:

$$F' = 2(F+1)\,i\sqrt{a}$$

Der Koeffizient von v^3 ist:

$$4ab\,F'^2 - 4(F+1)^2 \cdot (\quad 4a^2 b) = 0$$

$$\text{oder } F'^2 = -4(F+1)^2 \cdot a$$

also $F' = 2(F+1)\,i\sqrt{a}$. Das ist derselbe wie der von v^4.

Der Koeffizient von v^2 ist:

$$(2a+4b^2)\,F'^2 - 4(F+1)^2(-4a^2 b) = 0$$

$$\text{oder } F' = 2(F+1)\,i\sqrt{a}\,\sqrt{\frac{4ab}{2a+4b}}$$

Es muss also $\dfrac{2ab}{a+2b} = 1$ sein.

Der Koeffizient von v:

$$4b\,F'^2 - 4(F+1)^2(-2b^3 + 2ab\,F) = 0$$

Das ist $F' = 2(F+1)\sqrt{\dfrac{-b^2+aF}{2}}$

Danach muss also $\sqrt{\dfrac{-b^2+aF}{2}} = i\sqrt{a}$ sein.

Aus dieser letzten Bedingung folgt

$$F = \frac{b^2 - 2a}{a} \text{ (konst.)}$$

Aus der ersten Bedingung $F' = 2(F+1)\,i\sqrt{a}$ folgt: $F+1 = k\,e^{2i\sqrt{(a\,u)}}$ wo k eine Konstante bedeutet.

Wenn aber F konstant sein soll, muss $a = 0$ sein.

Also auch für die imaginären Flächen von der verlangten Eigenschaft ist $\Sigma f'^2 = 0$

Wenn aber $a = 0$ ist, folgt auch aus

$$\sqrt{\frac{-b^2 + aF}{2}} = i \cdot \sqrt{a} \text{ dass } b = 0 \text{ ist}$$

und schliesslich folgt aus: $F' = 2(F+1)i\sqrt{a}$
dass $F' = 0$ also F konstant ist.

Damit wären alle im Längenelement vorkommenden Grössen bestimmt.

b) Die Haupttangentenkurven auf Regelflächen.

Ein rhombisches Netz können die Haupttangentenkurven auf Regelflächen nie bilden, weil die einzigen Regelflächen von konstantem Krümmungsmass die abwickelbaren Flächen sind.

1. Können die Geraden der Fläche Teiler zur zweiten Schar der Haupttangentenkurven sein?

Der Ansatz

$$ds^2 = (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\,du^2 + dv^2$$

ist erlaubt, solange die Geraden keine Minimalgeraden sind.

Die zweite Schar der Haupttangentenkurven hat die Differenzialgleichung:

$$E\,du + 2F\,dv = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \varphi'' + vf'' & \varphi' + vf' & f \\ \chi'' + vg'' & \chi' + vg' & g \\ \psi'' + vh'' & \psi' + vh' & h \end{vmatrix} du + 2 \begin{vmatrix} f' & \varphi' + vf' & f \\ g' & \chi' + vg' & g \\ h' & \psi' + vh' & h \end{vmatrix} dv = 0$$

$$\left[\begin{vmatrix} \varphi'' & \varphi' & f \\ \chi'' & \chi' & g \\ \psi'' & \psi' & h \end{vmatrix} + v \left(\begin{vmatrix} f'' & \varphi' & f \\ g'' & \chi' & g \\ h'' & \psi' & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi'' & f' & f \\ \chi'' & g' & g \\ \psi'' & h' & h \end{vmatrix} \right) + v^2 \begin{vmatrix} f'' & f' & f \\ g'' & g' & g \\ h'' & h' & h \end{vmatrix} \right] du + 2 \begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix} dv = 0$$

Der Koeffizient von v^2 sei A, der von v sei B und das von v freie Glied sei C. Der Koeffizient von dv soll F_1 sein.

Die Differenzialgleichung ist dann:

$$(Av^2 + B \cdot v + C)\,du + 2F_1\,dv = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{Av^2 + Bv + C}{2F_1}$$

Setzt man diesen Wert für $\frac{dv}{du}$ in das Längenelement ein, dann müsste dasselbe eine Funktion von u allein ergeben. Also

$$1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2 + \left(\frac{Av^2 + Bv + C}{2F_1}\right)^2 = F(u)$$

Damit diese Gleichung bestehen kann, müssen die Koeffizienten der Potenzen von v für sich verschwinden. Die Koeffizienten der Potenzen von v sind nacheinander:

$\frac{A^2}{4F_1^2}$, $\frac{AB}{2F_1^2}$, $\Sigma f'^2 + \frac{B^2 + 2AC}{4F_1^2}$ und schliesslich der Koeffizient von v: $2\Sigma\varphi' f' + \frac{BG}{2F_1^2}$

Erste Bedingung ist also $A = 0$

$$\begin{vmatrix} f'' & f' & f \\ g'' & g' & g \\ h'' & h' & h \end{vmatrix} = 0$$

Wenn diese Determinante Null ist, besteht zwischen f, g und h eine Beziehung mit linearen Koeffizienten:

$$C_1 f + C_2 g + C_3 h = 0$$

Deutet man C_1, C_2 und C_3 als Richtungskosinuse, dann sagt die obige Beziehung, dass die Geraden der Fläche senkrecht sind zu einer Geraden oder parallel einer festen Ebene.

Da $A = 0$ ist, so geht die dritte Bedingung über in:

$$\Sigma f'^2 + \frac{B^2}{4F_1^2} = 0$$

Für reelle Werte kann diese Gleichung nur bestehen, wenn f, g und h konstant und $B = 0$ ist.

Die gesuchten Flächen müssten also Zylinderflüchen sein. Diese können aber, weil sie abwickelbar sind, die verlangte Eigenschaft nicht haben.

Es sollen nun die hierher gehörigen imaginären Flächen gefunden werden.

Da die Geraden einer Ebene parallel sein sollen, gibt man sich als diese Ebene die x y Ebene, setzt also $h = 0$

Dann ist $B = \begin{vmatrix} f'' & \varphi' & f \\ g'' & \chi' & g \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi'' & f' & f \\ \chi'' & g' & g \\ \psi'' & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$-\psi'(f''g - fg'') + \psi''(f'g - fg')$$

und $F_1 = \begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} = -\psi'(f'g - fg')$

Obige Beziehung lautet also:

$$\Sigma f'^2 + \left(\frac{-\psi'(f''g - fg'') + \psi''(f'g - fg')}{2\psi'(f'g - fg')}\right)^2 = 0$$

Daraus folgt für $\frac{\psi''}{\psi'} = \frac{f''g - fg''}{f'g - fg'} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}$

also $\psi' = K_2(f'g - fg')e^{-2i\int\sqrt{\Sigma f'^2}\,du}$ K_2 ist eine willkürliche Konstante.

Die vierte Bedingung ist:

$$2\Sigma\varphi' f' + \frac{B \cdot C}{2F_1^2} = 0$$

Aus $\Sigma f'^2 + \frac{B^2}{4F_1^2} = 0$, folgt $\frac{B}{2F_1} = i\sqrt{\Sigma f'^2}$

Die Bedingung ist dann:

$$2(\varphi' f' + \chi' g') + i\sqrt{\Sigma f'^2}\,\frac{\begin{vmatrix} \varphi'' & \varphi' & f \\ \chi'' & \chi' & g \\ \psi'' & \psi' & h \end{vmatrix}}{-\psi'(g' - fg')} = 0$$

Das ist die letzte der Bedingungen. Man kann also über eine der Grössen φ und χ willkürlich verfügen und setzt etwa $\chi = 0$. Die Leitkurve ist also dann eben.

Die Bedingung lautet dann:

$$2\varphi' f' + i\sqrt{\Sigma f'^2}\,\frac{g(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{(f'g - fg')\psi'} = 0$$

oder: $2\varphi' f' + i\sqrt{\Sigma f'^2}\,\frac{\cdot g}{f'g - fg'}\left(\varphi'' - \varphi'\frac{\psi''}{\psi'}\right) = 0$

Es ist aber: $\frac{\psi''}{\psi'} = \frac{f''g - fg''}{f'g - fg'} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}$

also $\varphi'\left[2f' - i\sqrt{\Sigma f'^2}\frac{g}{f'g - fg'}\left(\frac{f''g - fg''}{f'g - fg'} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}\right)\right]$

$$+\varphi'' \cdot i\sqrt{\Sigma f'^2}\frac{g}{f'g - fg'} = 0$$

und $\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{ig\sqrt{\Sigma f'^2}\left(\frac{f''g - fg''}{f'g - fg''} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}\right) - 2f'(f'g - fg')}{i\sqrt{\Sigma f'^2} \cdot g}$

also $\varphi' = K_1 e^{\int \frac{ig\sqrt{\Sigma f'^2}\left(\frac{f''g - fg''}{f'g - fg'} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}\right) - 2f'(f'g - fg')}{i\sqrt{\Sigma f'^2} \cdot g} du}$

Die Flächen selbst dann:

$$x = \int K_1 e^{\int \frac{ig\sqrt{\Sigma f'^2}\left(\frac{f''g - fg''}{f''g - g'f} - 2i\sqrt{\Sigma f'^2}\right) - 2f'(f'g - fg')}{i\sqrt{\Sigma f'^2} \cdot g} du} + C_1 + v \cdot f$$

$$y = \qquad\qquad v \cdot k$$

$$z = \int K_2 (f'g - fg') e^{-\int 2i\sqrt{\Sigma f'^2} du} + C_2$$

Da $f^2 + g^2 = 1$ ist kann man auch $f = \frac{2\lambda(u)}{1 + \lambda^2(u)}$ und

$$g = \frac{1 - \lambda^2(u)}{1 + \lambda^2(u)} \text{ setzen.}$$

Dann ist $f' = 2\lambda' \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} g' = \frac{-2\lambda' 2\lambda}{(1 + \lambda^2)^2}$; $f'g - fg' = \frac{2\lambda'}{1 + \lambda^2}$

und $f''g - fg'' = \frac{2\lambda''(1 + \lambda^2) - 4\lambda^2\lambda'}{(1 + \lambda^2)^2}$, $\sqrt{\Sigma f'^2} = \frac{2\lambda'}{1 + \lambda^2}$

Die Flächen sind dann:

$$x = \int K_1 \frac{\lambda'}{1+\lambda^2}\,du + v\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$y = v\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

$$z = \int K_2 \frac{\cdot\, 2\,\lambda'}{1+\lambda^2} e^{-\int \frac{4\,i\,\lambda'}{1+\lambda^2}\,du}\,du$$

Beispiel:

Man setzt $\lambda = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$

Die Fläche ist dann:

$$x = \frac{K_1}{2}\,u + v \sin u$$

$$y = v \cos u$$

$$z = \frac{K_2}{2}\,(-i \sin 2u + \cos 2u)$$

Die ebene Leitkurve ist: $x = \frac{K_1\,u}{2}$, $z = \frac{K_2}{2}\,(i \sin 2u + \cos 2u)$

Es wurde oben schon hervorgehoben, dass der Ansatz die von Minimalgeraden gebildeten Flächen nicht mit einschliesst, da für diese $dv = 0$ ist. Nach Scheffers „Theorie der Flächen" II. Bd. S. 228 sind alle Flächen mit Minimalgeraden in der Formel enthalten:

$$x = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,\varphi(u)\,du + \frac{1}{2}\,(1 = \omega(u)^2)\,v$$

$$y = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\,\varphi(u)\,du + \frac{i}{2}\,(1+\omega(u)^2)\,v$$

$$z = \int u\,\varphi(u)\,du + \omega \cdot v$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind:

$$e = 2\,v\,\varphi(u)\,\omega'(u)[u-\omega(u)] + v^2\omega'^2,\ f = -\frac{1}{2}[u-\omega(u)]^2\,\varphi(u),\ g = 0$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind:

$$E = \frac{i}{\Delta}\Big[v^2\,\omega'^3 + v\Big\{-\omega''\,\varphi\frac{(u-\omega)^2}{2} - \varphi\,\omega'^2\,(\omega-u) + \omega'\cdot\Big(\varphi\cdot(u-\omega) + \frac{\varphi'}{2}(u-\omega)\Big)\Big\} - \varphi^2(u-\omega)^2\Big]$$

$$F = -i\frac{(u-\omega)^2\,\varphi\,\omega'}{2\,\Delta}$$

$$G = 0$$

Das Längenelement ist:

$$ds^2 = \Big(2\,\varphi\,\omega'\,(u-\omega)\,v + \omega'^2\,v^2 - (u-\omega)^2\,\varphi\frac{dv}{du}\Big)\,du^2$$

$\frac{dv}{du}$ bestimmt man aus $E\,du + 2\,F\,dv = 0$ und setzt es in das Längenelement ein. Dann soll dasselbe nur von u abhängen

$$ds^2 = \Big\{2\,\varphi\,\omega'\,(u-\omega)\,v + \omega'^2\,v^2 - \frac{\varphi\,(u-\omega)^2}{\varphi\,\omega'\,(u-\omega)^2}\cdot \Big[v^2\,\omega'^3 + v\Big(-\omega''\,\varphi\frac{(u-\omega)^2}{2} - \varphi\,\omega'^2\,(\omega-u) + \omega'\Big(\varphi\cdot(u-\omega) + \frac{\varphi'}{2}(u-\omega)\Big)\Big) - \frac{(u-\omega)^2}{2}\,\varphi^2\Big]\Big\}\,du^2$$

Der Koeffizient von v^2 hebt sich weg. Der von v muss Null gesetzt werden:

$$2\,\varphi\,\omega'\,(u-\omega) = \frac{1}{\omega'}\Big(-\omega''\,\varphi\frac{(u-\omega)^2}{2} - \varphi\,\omega'^2\,(\omega-u) + \omega'\Big\{\varphi\cdot(u-\omega) + \frac{\varphi'}{2}(u-\omega)^2\Big\}\Big)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{2\,\omega'^2 - 2\,\omega' + \omega''\,(u-\omega)}{(u-\omega)\,\omega'} = \frac{\omega''}{\omega'} - 2\,\frac{1-\omega'}{u-\omega}$$

also $\varphi = K\,\dfrac{\omega'}{(u-\omega)^2}$

Das Bogenelement ist dann:

$$ds^2 = -\varphi^2\frac{(u-\omega)^2}{2\,\omega'}\,du^2$$

$$\text{oder}\quad s = i\,K\int\frac{\sqrt{\omega'}}{u-\omega}\,du + c$$

Die Flächen sind aber die von Scheffers selbst angegebenen Flächen konstanten Krümmungsmasses mit einer Schar von Minimalgeraden:

$$x = \frac{K}{2}\int (1-u^2)\frac{\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \frac{1}{2}(1-\omega^2)\,v$$

$$y = \frac{iK}{2}\int (1+u^2)\frac{\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \frac{i}{2}(1+\omega^2)\,v$$

$$z = K\int u\,\frac{\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \omega\cdot v$$

Beispiel: $\omega = 2u$, $\omega' = 2$.

$$x = -K\left(u+\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}(1-4u^2)\,v$$

$$y = iK\left(u-\frac{1}{u}\right) + \frac{i}{2}(1+4u^2)\,v$$

$$z = 2K\ln(u) + 2uv.$$

2. Es sollen die Regelflächen bestimmt werden, auf denen die zweite Schar der Haupttangentenkurven Teiler der Geraden sind.

Bei der Untersuchung sollen die Haupttangentenkurven selbst zum Koordinatensystem gewählt werden.

Das Längenelement ist:

$$ds^2 = (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)\,du^2 + 2\Sigma\varphi' f\,du\,dv + dv^2$$

ausserdem muss $E = 0$ und $G = 0$ sein.

$G = 0$ weil die Geraden selbst zum Koordinatensystem gehören.

E ist die im ersten Teil dieses Abschnittes ausführlich angegebene Grösse. Damit diese Null ist, muss jeder Koeffizient von v für sich Null sein. Also $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

$A = 0$ heisst, wie oben schon bemerkt, dass die Geraden einer festen Ebene parallel sind. Man kann das auch folgendermassen einsehen: $x = f$, $y = g$, $z = h$ ist eine sphärische Kurve, weil $f^2 + g^2 + h^2 = 1$ ist. Die Gleichung ihrer Schmiegungsebene ist:

$$\begin{vmatrix} x-f & y-g & z-h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix} = 0$$

Diese ist für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ immer erfüllt, weil $A = 0$ ist.

Die Schmiegungsebene der sphärischen Kurve geht immer durch den Anfangspunkt. Die Schmiegungsebene enthält immer drei Punkte der Kurve. Drei Punkte einer sphärischen Kurve, die in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen, können nur einem grössten Kugelkreis angehören. Die sphärische Kurve ist also ein grösster Kugelkreis. Und alle Geraden f, g, h sind den Radien dieses Kreises parallel.

Ferner muss auch $C = 0$ sein, also

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ \varphi' & \chi' & \psi' \\ \varphi'' & \chi'' & \psi'' \end{vmatrix} = 0$$

oder: $f(\chi'\psi'' - \psi' x'') + g(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'') + h(\varphi' x'' - x'\varphi'') = 0$

Die Grössen, die mit f, g, h multipliziert sind, sind im wesentlichen die Richtungskosinuse der Normalen der Schmiegungsebene der Kurve

$$x = \varphi(u),\ y = \chi(u),\ z = \psi(u).$$

Eine weitere Bedingung ist also:

Die Geraden der Regelflächen liegen in der Schmiegungsebene der Leitkurve.

Die dritte Bedingung fordert: $B = 0$.

Die erste Bedingung verlangt, dass die Geraden einer Ebene parallel sein sollen. Als diese Ebene wählen wir die x, y Ebene. Mithin ist $h = 0$. B ist dann:

$$\begin{vmatrix} f'' & \varphi' & f \\ g'' & \chi' & g \\ 0'' & \psi' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi'' & f' & f \\ \chi'' & g' & g \\ \psi'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder: $-\psi'(f''g - fg'') + \psi''(f'g - fg') = 0$

Daraus $\frac{\psi''}{\psi'} = \frac{fg'' - f''g}{fg' - fg'}$ oder $\varphi' = K(f'g - fg')$ wo K eine Konstante ist.

Die zweite Bedingung $E = 0$ lautet, wenn man $h = 0$ berücksichtigt:

$$f(\chi' \psi'' - \psi' \chi'') + g(\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi') = 0$$

$$\text{oder: } \frac{f}{g} = \frac{\varphi'' \psi' - \varphi' \psi''}{\chi'' \psi' - \psi'' \chi'} = \frac{\frac{\varphi'' \psi' - \varphi' \psi''}{\psi'^2}}{\frac{\chi'' \psi' - \psi'' \chi'}{\psi'^2}} = \frac{\frac{d}{du}\left(\frac{\varphi'}{\psi'}\right)}{\frac{d}{du}\left(\frac{\chi'}{\psi'}\right)}$$

$$\text{also } \frac{d}{du}\left(\frac{\varphi'}{\psi'}\right) = \mu f, \quad \frac{d}{du}\left(\frac{\chi'}{\psi'}\right) = \mu \cdot g$$

wo μ eine willkürliche Funktion von u ist,

$$\text{dann ist } \frac{\varphi'}{\psi'} = \int \mu f \, du, \quad \frac{\chi'}{\psi'} = \int \mu g \, du$$

Wie wir oben sahen, ist $\psi' = K(f' g - f g')$

$$\text{also } \varphi = K \int (f' g - f g') \left(\int \mu f \, du + c_1 \right) du$$

$$\chi = K \int (f' g - f g') \left(\int \mu g \, du + c_2 \right) du$$

$$\psi = K \int (f' g - f g') \, du$$

Die Flächen sind dann:

$$x = \int K (f' g - f g') \left(\int u f \, du + c_1 \right) du + v \cdot f$$

$$y = \int K (f' g - f g') \left(\int u g \, du + c_2 \right) du + v g$$

$$z = \int K (f' g - f g') \, du$$

Beispiele: $\mu = 0$ $f = \cos u$ $g = \sin u$ $c_1 = 0$ $c_2 = 0$

$$x = v f$$
$$y = v g$$
$$z = K u$$

Das ist die gemeine Schraubenfläche mit der z Achse als Leitlinie.

Es soll $\mu = 0$ sein, dann erhält man:

$$x = c_1 K \int (f' g - f g') \, du + v f$$

$$y = c_2 K \int (f' g - f g') \, du + v g$$

$$z = K \int (f' g - f g') \, du .$$

Die Leitkurve ist eine beliebige Gerade im Raum.

Für $\mu = a$, $f = \cos u$, $g = \sin u$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ist die Leitkurve eine Schraubenlinie und die Fläche die Schraubenfläche:

$$x = -a \cdot K \cos u + v \cos u$$
$$y = -a \cdot K \sin u + v \cdot \sin u$$
$$z = K u$$

Sind c_1 und c_2 nicht Null, dann ergibt sich folgende Fläche:

$$x = -aK \cos u + K c_1 \cdot u + v \cos u$$
$$y = -aK \sin u + K c_2 u + v \sin u$$
$$z = K u$$

Die Projektion der Leitkurve in die Ebene entsteht durch Vektoraddition der Radien des Kreises vom Radius aK mit dem Vektor von der konstanten Richtung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{K C_2}{K C_1}$ und der sich ändernden skalaren Grösse: $K u \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

Statt der f und g, die ja der Bedingung $f^2 + g^2 = 1$ genügen, kann man auch $f = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ und $g = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ setzen, wo λ eine beliebige Funktion von u ist.

Die Flächen sind dann:

$$x = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} \left(\int 2\mu\lambda \, du + c_1 \right) du + v \cdot \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$
$$y = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} \left(\int \mu \cdot (1-\lambda^2) \, du + c_2 \right) du + v \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$
$$z = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} du$$

Hier sind λ und μ beliebige Funktionen von u.

Ist $\mu = \lambda'$ dann sind die Flächen:

$$x = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} (\lambda^2 + c_1) \, du + v \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$
$$y = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3} + c_2 \right) du + v \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$
$$z = K \int \frac{2\lambda'}{1+\lambda^2} du + c_3$$

Beispiel:

Für $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ und $\lambda = u$ ergibt sich:

$$x = 2u - 2 \operatorname{arc\,tg} u + v\frac{2u}{1-u^2}$$

$$y = -\frac{1}{3}u^2 + \frac{4}{3}\ln(1+u^2) + v\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$z = 2 \operatorname{arc\,tg} u$$

Von dem Verlaufe der Leitkurve kann man sich folgendermassen eine Vorstellung machen:

Man zeichnet zunächst die nach der negativen Seite der y Achse hin geöffnete Parabel: $x = 2u$, $y = -\frac{1}{3}u^2$. Die wirkliche Projektion der Leitkurve geht daraus hervor, indem man die Punkte der Parabel um $2 \operatorname{arc\,tg} u$ in Richtung der x Achse und um $\frac{4}{3}\ln(+u^2)$ in Richtung der y Achse verschiebt. Die Punkte der Raumkurve liegen um $2 \operatorname{arc\,tg} u$ über der x y Ebene.

Der Fall, dass die zweite Schar der Haupttangentenkurven die Geraden unter konstantem Winkel teilt, ist nur für den rechten Winkel möglich.

Denn dann wäre $f = a\sqrt{e}$ oder $f^2 = a^2 e$

also $(\Sigma \varphi' f'^2 = a^2(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2 \Sigma f'^2)$

Das ist uur möglich für a und $\Sigma\varphi' f$ gleich Null.

c) Die Kurven konstanten Krümmungsmasses.

Die Kurven konstanten Krümmungsmasses sind:

$$K_1 = \frac{EG - F^2}{eg = f^2}$$

Wenn man das Koordinatensystem selbst einführt, dann sind die Kurven $v = c$ die Kurven konstanten Krümmungsmasses. Es darf dann also K_1 nur von v abhängen.

Das Krümmungsmass $K_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix}^2}{(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2 - \Sigma\varphi' f)^2}$

oder $K = \dfrac{1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2 - \Sigma\varphi' f}{\begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix}}$

Damit K wirklich nur von v abhängt, müssen die Koeffizienten der Potenzen von v konstant sein. Man kann nachweisen, dass die hinreichende Bedingung dafür ist, dass $\Sigma f'^2$, $\Sigma\varphi' f'$ und $\Sigma\varphi' f$ konstante Grössen sind. Es folgt das daraus, dass die im Nenner stehende Determinante konstant ist, wenn die eben erwähnten Grössen konstant sind:

$$\begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma f'^2 & \Sigma\varphi' f' & \Sigma f f' \\ \Sigma\varphi' f' & \Sigma\varphi f'^2 & \Sigma\varphi' f \\ \Sigma f f' & \Sigma\varphi' f & \Sigma f^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma f^2 & \Sigma\varphi' f' & 0 \\ \Sigma\varphi' f' & 1 & \Sigma\varphi' f \\ 0 & \Sigma\varphi' f & 1 \end{vmatrix}$$

Die Determinante hängt also nur noch von diesen drei Grössen ab.

Es ist nun $\Sigma f'^2 = 1$, $\Sigma\varphi' f = a$ und $\Sigma\varphi' f' = b$.

Man muss f, g, h so wählen, dass $\Sigma f^2 = 1$ und $\Sigma f^2 = 1$ ist.

Das ist der Fall für

$$f = \cos F(u) \cos\left[\int \frac{\sqrt{1 - F'^2}}{\cos F}\, du + c_1\right]$$

$$g = \cos F \cdot \sin\left[\int \frac{\sqrt{1 - F'^2}}{\cos F}\, du + c_2\right],\quad h = \sin F(u).$$

F(u) ist eine beliebige Funktion von u.

Zur Bestimmung von φ', χ', ψ' hat man folgende Gleichungen:

1. $\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi^2 = 1$
2. $\varphi' f' + \chi' g' + \psi' h' = a$
3. $\varphi' f + \chi' g + \psi' h = b$

Daraus folgt $\varphi' = (\psi'(g'h - gh') + ag - bg')\frac{1}{f'g - fg'}$

$$\chi' = (\psi'(h'f - hf') - af + bf')\frac{1}{f'g - fg'}$$

für ψ' folgt dann:

$$\psi'^2 - 2\psi'(ah' - bh) = (f'g - fg')^2 + (ah - bh')^2 - (a^2 + b^2)$$

$$\psi' = ah' - bh \pm \sqrt{(f'g - fg')^2 + (ah - bh')^2 + (ah' - bh)^2 - (a^2 + b^2)}$$

Durch einmalige Integration findet man dann φ, χ und ψ.

Untersuchung einzelner Fälle.

1. Man setzt $a = 0$ und $b = 0$. Dann ist

$$\psi' = (f'g - fg'),\ \varphi' = (g'h - gh'),\ \chi' = (h'f - hf')$$

Aus diesen Formeln folgt, dass diese Kurven von konstanter Torsion sind.

Man kann leicht auch folgendermassen darauf kommen: $\Sigma\varphi' f = 0$ sagt, dass die Geraden mit den Tangenten der Leitkurve einen rechten Winkel bilden.

Da $\Sigma\varphi' f = 0$, so ist auch $\Sigma\varphi' f' + \Sigma\varphi'' f = 0$, denn das ist das nach u differenzierte $\Sigma\varphi' f = 0$. Es ist aber $\Sigma\varphi' f' = 0$, also auch $\Sigma\varphi'' f = 0$. Das heisst aber: Die Geraden bilden auch mit den Hauptnormalen einen rechten Winkel. Die Geraden der Fläche sind also die Binormalen der Leitkurve.

Da $\Sigma f'^2 = 1$ ist, so ist u auch die Bogenlänge der sphärischen Kurve $x = f$, $y = g$, $z = h$. Es ist also das Verhältnis der Bogenlängen beider Kurven konstant. Die Kurven sind also von konstanter Torsion.

Den Satz kann man auch so formulieren: Auf den Regelflächen, die von den Binormalen der Kurven konstanter Torsion gebildet werden, sind die Orthogonaltrajektorien der Geradenschar die Kurven konstanten Krümmungsmasses der Fläche.

Man könnte erwähnen, dass die Leitlinie auch gleichzeitig die Striktionslinie der Fläche ist.

Hierher gehört die Schraubenfläche mit der Geraden oder einer Schraubenlinie als Leitkurve.

2. Es soll $\Sigma\varphi' f = 0$ und $\Sigma\varphi' f' = a$ sein.

Auch jetzt liegen die Geraden in der Normalebene der Tangente.

Man differenziere $\Sigma \varphi' f = 0$ und erhält:

$$\Sigma \varphi'' f + \Sigma \varphi' f' = 0.$$

Da $\Sigma \varphi' f' = a$, so ist $\Sigma \varphi'' f = -a$.

Man multipliziere mit $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi''^2 + \chi''^2 + \psi''^2}}$ und erhält:

$$\frac{\Sigma \varphi'' f}{\sqrt{\varphi''^2 + \chi''^2 + \psi''^2}} = a \cdot r$$

$$\frac{\Sigma \varphi'' f}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + \chi''^2}} = \cos\beta,$$ wo β der Winkel der Geraden mit der Hauptnormale der Leitkurve der Regelfläche ist.

Aus $\frac{1}{a} \cos\beta = r$ folgt, dass die Projektion der konstanten Strecke $\frac{1}{a}$ der Geraden auf die Hauptnormale gerade den Krümmungshalbmesser der Leitkurve gibt.

Für $\beta = 0$ und $\cos\beta = 1$ fällt die Gerade in die Hauptnormale. Aus $\frac{1}{a} \cos\beta = \frac{1}{r}$ folgt dann, dass r konstant ist. Für diesen Grenzfall ist dann die Leitkurve eine Kurve konstanter Krümmung. Man kann indessen leicht einsehen, dass nur die Schraubenlinie die verlangte Eigenschaft hat. Denn wie man zeigen kann, ist die Kurve, für die $\beta = 0$ ist, nicht allein von konstanter Krümmung, sondern auch von konstanter Torsion.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \chi' & \chi'' & \chi''' \\ \psi' & \psi'' & \psi''' \end{vmatrix}}{\varphi''^2 + \chi''^2 + \psi''^2}$$

dann ist $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma \varphi'^2 & \Sigma \varphi' \varphi'' & \Sigma \varphi' \varphi''' \\ \Sigma \varphi' \varphi'' & \Sigma \varphi''^2 & \Sigma \varphi'' \varphi''' \\ \Sigma \varphi' \varphi''' & \Sigma \varphi'' \varphi''' & \Sigma \varphi'''^2 \end{vmatrix}}{(\varphi''^2 + \chi'' + \psi''^2)}$

Es ist aber $\Sigma \varphi'^2 = 1$ also $\Sigma \varphi' \varphi' = 0 \cdot \Sigma \varphi''^2 = c$ also $\Sigma \varphi'' \varphi''' = 0$.

Man differenziere $\Sigma \varphi' \varphi'' = 0$ nach u, das gibt dann $\Sigma \varphi''^2 + \Sigma \varphi'' \varphi''' = 0$, da $\Sigma \varphi''^2 = c$, so ist auch $\Sigma \varphi \varphi''' = -c$ (konst.). Es ist jetzt noch einzusehen, dass $\Sigma \varphi'''^3$ konstant ist.

Nach obigem fällt die Gerade in die Hauptnormale und da $\Sigma\varphi''^2 = c$ ist, so ist $f = \frac{\varphi''}{\sqrt{c}}$, $g = \frac{\chi''}{\sqrt{c}}$ und $h = \frac{\psi'''}{\sqrt{c}}$, es ist aber $\Sigma f'^2 = 1$, $f' = \frac{\varphi'''}{\sqrt{c}}$, $g' = \frac{\chi'''}{\sqrt{c}}$ und $h = \frac{\psi'''}{\sqrt{c}}$ also $\Sigma\varphi'''^2 = c$.

Die Determinante wird also:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & c & 0 \\ -c & 0 & c \end{vmatrix}}{c^2} = \frac{c^2 - c^3}{c^2} \text{ also konst.}$$

Ist speziell $a = 1$, dann ist das Längenelement:

$$ds^2 = (1 + v)^2\, du^2 + d^2(1 + v)$$

also ist die Fläche abwickelbar. Sie muss aber unmittelbar eine Ebene sein, denn nur die Hauptnormalen ebener Kurven schneiden einander.

Es gilt mithin der Satz:

Die Orthogonaltrajektorien der Hauptnormalen der Schraubenlinie sind die Kurven konstanten Krümmungsmasses der durch die Hauptnormalen gebildeten Regelfläche.

3. Während im vorausgehenden $\Sigma\varphi' f = 0$ war, soll es jetzt gleich b sein.

Die Gerade liegt nicht mehr in der Normalebene. Es ist jetzt $\Sigma\varphi'' f = -a$. Wenn man genau wieder so vorgeht wie oben, folgt $r = -\frac{1}{a}\cos\beta$. Der Winkel, den Gerade und Hauptnormale bilden, muss so gewählt werden, dass die Projektion der konstanten Strecke $\frac{1}{a}$ der Geraden auf die Hauptnormale gerade den Krümmungshalbmesser gibt.

Gibt es umgekehrt auch Regelflächen, auf denen die Geraden die Teiler der Kurven konstanten Krümmungsmasses sind?

Man führt wieder das zu den Geraden orthogonale Kurvensystem und die Geraden als Koordinatensystem ein.

Das Krümmungsmass ist dann

$$K = \frac{1 + 2v\,\Sigma\varphi' f' + v^2 \Sigma f'^2}{\begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix}}$$

Die im Nenner stehende Determinante sei F_1.

Die Differenzialgleichung der Kurven konstanten Krümmungsmasses ist dann:

$$\frac{1}{F_1^2}\left[\left(2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + 2v^2\Sigma f' f''\right)F_1 - (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)F_1'\right] + \frac{dv}{du}\frac{1}{F_1}(2\Sigma\varphi' f' + 2v\Sigma f'^2) = 0$$

oder:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\left(2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + 2v^2\Sigma f' f''\right)F_1 - (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)F_1'}{2(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)F_1}$$

Es müsste dann dieser Wert für $\frac{dv}{du}$ in

$$ds^2 = \left[(1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2) + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]du$$

eingesetzt eine reine Funktion von u geben.

Also:

$$1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2 + \left[\frac{\left(2v\frac{d}{du}\Sigma\varphi' f' + 2v^2\Sigma f' f''\right)F_1 + (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)F_1'}{2(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)F_1}\right]^2 = F(u)$$

Man multipliziert beide Seiten mit $4(\Sigma\varphi' f' + v\Sigma f'^2)^2 F_1^2$, dann müssen die Koeffizienten der Potenzen von v wieder für sich Null sein.

Der Koeffizient von v^4 ist Null gesetzt:

$$4F_1^2(\Sigma f'^2)^3 + (2\Sigma f' f'' F_1 - \Sigma f'^2 F_1')^2 = 0$$

$\Sigma f'^2$ ist eine wesentlich positive Grösse. Obige Gleichung kann also nur für $\Sigma f'^2 = 0$ bestehen oder auch $F_1 = 0$.

Die Flächen sind also abwickelbar, auf diesen ist die Eigenschaft selbstverständlich.

d) Die Krümmungslinien.

1. Es soll zunächst nachgewiesen werden, dass es keine reellen Regelflächen gibt, auf denen die Geraden Teiler einer Schar von Krümmungslinien sind.

Die Differenzialgleichung der Krümmungslinien ist dann:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2}\frac{E}{F} \pm \sqrt{e + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2}}$$

Wenn die Orthogonaltrajektorien wieder zum Koordinatensystem gehören, ist das Längenelement:

$$ds^2 = \left[e + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] du^2$$

Setzt man für $\frac{dv}{du}$ obigen Wert ein, dann müsste das Längenelement eine reine Funktion von u sein.

$$e + \frac{E^2}{4F^2} + \left(e + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2}\right) \pm \frac{E}{F}\sqrt{e + \frac{E^2}{4F^2}} = \Phi(u)$$

oder:

$$\frac{E}{F}\sqrt{e + \frac{1}{4}\left(\frac{E}{F}\right)^2} = \Phi(u) - 2e - \frac{1}{2}\frac{E^2}{F^2}$$

Quadriert:

$$\frac{E^2}{F^2}\left(e + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2}\right) = \Phi^2 + 4e^2 + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2} - 4e\,\Phi(u) - \Phi(u)\frac{E^2}{F^2} + 2e\frac{E^2}{F^2}$$

Es sei wieder $E = \frac{A v^2 + B v + C}{\Delta}$ und $F = \frac{F_1}{\Delta}$

Aus dem Ausdruck wird dann:

$$\Phi(u)^2 = 4e^2 - 4e\,\Phi(u) - \Phi(u)\left(\frac{A v^2 + B v + C}{F_1^2}\right)^2 + e\left(\frac{A v^2 + B v + C}{F_1^2}\right)^2 = 0$$

oder:

$$\Phi^2 + 4(1 + 2v\,\Sigma\varphi' f' + v^2\,\Sigma f'^2)^2 - 4(1 + 2v\,\Sigma\varphi' f' + v^2\,\Sigma f'^2)\,\Phi(u) - \frac{\Phi(u)}{F_1^2}(A v^2 + B v + c)^2 + (1 + 2v\,\Sigma\varphi' f' + v^2\,\Sigma f'^2)\left(\frac{A v^2 + B v + C}{F_1}\right)^2 = 0$$

Auch hier müssen die Koeffizienten der Potenzen von v für sich Null sein.

v^6 hat $\frac{A^2}{F_1^2}\Sigma f'^2$ zum Koffizienten. Dieser ist Null, wenn A oder $\Sigma f'^2$ gleich Null ist.

Es sei also $A = 0$

Die nächst niedrige Potenz von v ist dann die vierte. Der Koeffizient ist: $4\,\Sigma f'^2 + \Sigma f'^2 \frac{B^2}{F_1}$

Dieser Ausdruck ist nur Null, wenn $\Sigma f'^2 = 0$ ist. Es haben also nur die Zylinderflächen die Eigenschaft, dass die Geraden die zweite Schar von Krümmungslinien teilen.

2. Es sollen die Flächen bestimmt werden, auf denen die zweite Schar von Krümmungslinien die Geraden teilt.

Das Längenelement sei

$$ds^2 = \left[1 + 2v\,\Sigma\varphi' f' + v^2 \Sigma f'^2 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right] du^2$$

Die Differenzialgleichung der Krümmungslinien ist:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2}\frac{E}{F} \pm \sqrt{e + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2}}$$

Alle Kurven, die auf den Geraden gleiche Stücke abschneiden, haben die Differenzialgleichung:

$$\frac{dv}{du} = -\Phi'(u)$$

Wo $\Phi'(u)$ eine beliebige Funktion von u ist. Darunter müssten auch die Krümmungslinien sein.

$$-\frac{1}{2}\frac{E}{F} \pm \sqrt{e + \frac{1}{4}\frac{E^2}{F^2}} = -\Phi'(u)$$

Wenn man die Quadratwurzel isoliert und quadriert ergibt sich: $F(\Phi' - e) = \Phi' E$

oder: $$E = F\frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'}$$

Neben dieser Bezeichnung müssen aber auch die Fundamentalgleichungen bestehen.

Die erste Fundamentalgleichung ist:

$$E_v - F_u = \frac{e_v}{2e}E - \frac{e_u}{2e}F$$

oder wenn man für E obigen Wert einsetzt:

$$F_v \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - \frac{F}{\Phi'} e_v - F_u = \frac{e_v}{2e} F \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - \frac{e_u}{2e} F$$

$$F = \frac{F_1}{\sqrt{e}}, \; F_v = -\frac{1}{2} \frac{F}{e^{3/2}} e_v, \; F_u = \frac{F_1'}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} F_1 \frac{e_u}{\sqrt{e^3}}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{F}{e^{3,2}} e_v \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - \frac{F_1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{e_v}{\Phi'} - \frac{F_1'}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2} F_1' \frac{e_u}{\sqrt{e^3}}$$

$$= \frac{e_v}{2e} \frac{F_1}{\sqrt{e}} \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - \frac{e_u}{2e} \frac{F_1}{\sqrt{e}}$$

$$-F_1 e_v \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - 2F_1 \frac{e e_v}{\Phi'} - 2eF_1' + F_1 e_u = e_v F_1 \frac{\Phi'^2 - e}{\Phi'} - e_u F_1$$

oder: $$F_1 e_u - F_1' e - F_1 e_v \Phi' = 0$$

Der Koeffizient von v^2 gleich Null gesetzt ist:

$$-F_1' \Sigma f'^2 + F_1 \frac{d}{du} \Sigma f'^2 = 0 \quad \text{also} \quad F_1 = K \Sigma f'^2 \quad K \text{ ist konst.}$$

Der Koeffizient von v Null gesetzt:

$$F_1 \frac{d}{du} \Sigma \varphi' f' - F_1' \Sigma \varphi' f' - F_1 \Sigma f'^2 \Phi' = 0$$

Das von v frei Glied ist.

$$F_1' + 2 F_1 \Sigma \varphi' f' \Phi' = 0$$

Ersetzt man in der zweiten Bediugung Φ' vermöge der dritten, dann erhält man eine Differenzialgleichung für $\Sigma \varphi' f'$. Sie liefert:

$$\Sigma \varphi' f' = F_1 \sqrt{\frac{1}{KF_1} + C}$$

Die zweite Fundamentalgleichung lautet in unserem Falle:

$$-\frac{F_1^2}{\Delta^2} = -\frac{2 \Sigma f'^2}{2 \Delta^2} + \frac{1}{4 \Delta^4} (2 \Sigma \varphi' f' + 2 v \Sigma f'^2)^2$$

Die Koeffizianten von v^2 und v sind identisch Null. Als Bedingung bleibt:

$$(\Sigma \varphi' f')^2 = -F_1^2 + \frac{F_1}{K}$$

Also $$\Sigma \varphi' f' = F_1 \sqrt{\frac{1}{KF_1} - 1}$$

Vorhin hat sich für $\Sigma\varphi' f'$ ergeben:

$$\Sigma\varphi' f' = F_1 \sqrt{\frac{1}{KF_1} + C}$$

Es muss also $C = -1$ sein, damit beide Werte verträglich sind.

Die dritte Fundamentalgleichueg sagt nur, dass F_1 blos von u abhängt.

Aus $2\Phi' F_1 \Sigma\varphi' f' = -F_1'$ folgt

$$\Phi' = \frac{-F_1'}{2F_1\Sigma\varphi' f'} = \frac{-F_1'}{2F_1^2\sqrt{\frac{1}{KF_1} - 1}}$$

Da $F_1 = \begin{vmatrix} f' & \varphi' & f \\ g' & \chi' & g \\ h' & \psi' & h \end{vmatrix}$ ist, so muss nachgewiesen werden, dass kein Widerspruch entsteht.

$$F_1^2 = \begin{vmatrix} \Sigma f'^2 & \Sigma\varphi' f' & 0 \\ \Sigma\varphi' f' & \Sigma\varphi'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Sigma f'^2 - (\Sigma\varphi' f')^2$$

Das ist aber die durch die zweite Fundamentalgleichung gelieferte Bedingung.

Man kann also jetzt sämtliche vorkommende Grössen durch F_1 ausdrücken.

$$\Sigma\varphi'^2 = 1,\ \Sigma\varphi' f' = F_1\sqrt{\frac{1}{KF_1} - 1},\ \Sigma\varphi' f = 0,\ \Sigma f'^2 = \frac{F_1}{K}$$

$$F = \frac{F_1}{e},\ E = \frac{F_1}{e}\frac{F_1'^2 - 4F_1^4\left(\frac{1}{KF_1} - 1\right)}{2F_1^2\sqrt{\frac{1}{KF_1} - 1}},\ G = 0$$

Aus

1. $\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2 = 1$
2. $\varphi' f + \chi' g + \psi' h = 0$
3. $\varphi' f' + \chi' g' + \psi' h = F_1\sqrt{\frac{1}{KF_1} - 1}$

kann man φ', χ', ψ' berechnen.

Man geht im wesentlichen so vor wie bei den Kurven konstanten Krümmungsmasses.

Für ψ' hat man die Differenzialgleichungen:

$$\psi' = h' F_1 \sqrt{\frac{1}{K F_1} - 1} \pm \sqrt{(f'g - fg')^2 + F_1^2 \left(\frac{1}{K F_1} - 1\right)(h^2 + h'^2 - 1)}$$

Für φ' und χ' folgt dann:

$$\varphi' = \left(\psi'(g'h - gh') + F_1 \sqrt{\frac{1}{K F_1} - 1} \cdot g\right) \frac{1}{f'g - fg'}$$

$$\chi' = \left(\psi'(h'f - hf') - F_1 \sqrt{\frac{1}{K F_1} - 1} \cdot f\right) \frac{1}{f'g - fg'}$$

f, g und h müssen so gewählt werden, dass $\Sigma f^2 = 1$ und $\Sigma f'^2 = \frac{F_1}{K}$ ist.

Für $f = \cos\lambda \cos\mu$, $g = \cos\lambda \sin\mu$, $h = \sin\lambda$ ist die erste Bedingung erfüllt. λ und μ sind zwei beliebige Funktionen von u.

$$\Sigma f'^2 = \lambda'^2 + \cos^2\lambda \mu'^2 = \frac{F_1}{K}$$

Wenn man die Formeln symmetrisch gestalten will, setzt man

$$\lambda' = \sqrt{\frac{F_1}{K}} \cdot \frac{2\gamma^2}{1+\gamma^2}, \quad \cos\lambda \mu' = \sqrt{\frac{F_1}{K}} \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}$$

also $$\lambda = \int \sqrt{\frac{F_1}{K}} \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} du,$$

$$\mu = \int \sqrt{\frac{F_1}{K}} \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \frac{1}{\cos \int \sqrt{\frac{F_1}{K}} \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} du} du$$

F_1 und γ sind zwei vollständige beliebige Funktionen von u. Die Grössen weiter zu berechnen ist nicht schwer, doch werden die Formeln immer unübersichtlicher.

3. Gibt es Regelflächen, auf denen beide Scharen von Krümmungslinien die Geraden teilen?

Als Koordinatensystem sei das der Geraden mit einer Schar von Krümmungslinien gegeben.

Das Längenelement ist:

$$ds^2 = (1 + 2v\Sigma\varphi' f' + v^2\Sigma f'^2)du^2 + 2\Sigma\varphi' f\,du\,dv + dv^2$$

Da die eine Schar von Krümmungslinien Teiler sind, ist:

$$eF - fE = 0 \text{ oder } \frac{e}{f} = \frac{E}{F}$$

Alle Kurven, welche dann auf den Geraden gleiche Stücke abschneiden, haben die Differenzialgleichung:

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u)$$

wo $\Phi(u)$ wieder eine beliebige Funktion von u ist.

Soll also die zweite Schar der Krümmungslinien auch unter den Teilern der Gerade sein, dann muss

$$\frac{dv}{du} = \frac{F}{E} = \frac{Av^2 + Bv + C}{F_1} = + \Phi(u) \text{ sein.}$$

Es wäre also $A = 0$ und $B = 0$.

Nun ist aber $\frac{e}{f} = \frac{E}{F}$ also auch $\frac{e}{f} = \Phi(u)$

es müsste auch $\Sigma f'^2 = 0$ und $\Sigma\varphi' f' = 0$ sein. Solche Flächen sind aber abwickelbar, diese können aber, da die Geraden mit der einen Schar der Krümmungslinien bereits zusammenfallen, die verlangte Eigenschaft nicht haben.

Zum Schluss möchte ich nicht versäumen, nochmals Herrn Geheimrat Dr. A. Voss für das ergiebige Thema und den Herren Geheimrat Dr. W. von Dyck und Professor Dr. H. Liebmann für mehrfache Ratschläge bei der endgültigen Fassung der Arbeit meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 3

I. Aufstellung der Differenzialgleichungen des Teilungsproblems in zwei Formen. Einige Fälle der Ebene 5

II. Ausgezeichnete Kurvensysteme der Flächen:

a) Die konjugierten Kurven 15

b) Die Krümmungslinien 18

c) Die Haupttangentenkurven 19

d) Die geodätischen Linien 24

e) Die Orthogonaltrajektorien einer Schar geodätischer Linien 27

III. Die Regelflächen:

a) Die geodätischen Linien 29

b) Die Haupttangentenkurven 33

c) Die Kurven konstanten Krümmungsmasses 43

d) Die Krümmungslinien 48